תרגיל בית 11 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1. תהי $H \leq \mathbb{Q}$ תת־חבורה מאינדקס סופי. הוכיחו כי $H = \mathbb{Q}$.
הסיקו כי גם ל-$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ אין תת־חבורות נאותות מאינדקס סופי.

שאלה 2. תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$. הוכיחו שאם $N_1, N_2 \lhd G$ תת־חבורות נורמליות המקיימות $N_1 \cap H = N_2 \cap H$, אז $(HN_1)/N_1 \cong (HN_2)/N_2$.

שאלה 3. תהי G חבורה סופית, ותהיינה $H, N \leq G$ תת־חבורות נורמליות שעבורן מתקיים $([G:H], [G:N]) = 1$. הוכיחו כי $G = HN$.
אתגר (רשות): אפשר לוותר על הדרישה לנורמליות, והטענה תשאר נכונה!

שאלה 4. תהי שרשרת עולה של חבורות $G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3 \subseteq \ldots$, ונסמן $H = \bigcup_i G_i$ עבור איחודן. בשאלת רשות 8 בתרגיל בית 4 ראינו כי H היא חבורה.

א. הוכיחו שאם G_i היא חבורה פשוטה לכל i, אז גם H פשוטה.
הערה: כך ניתן ליצור חבורות פשוטות אינסופיות מחבורות פשוטות סופיות.

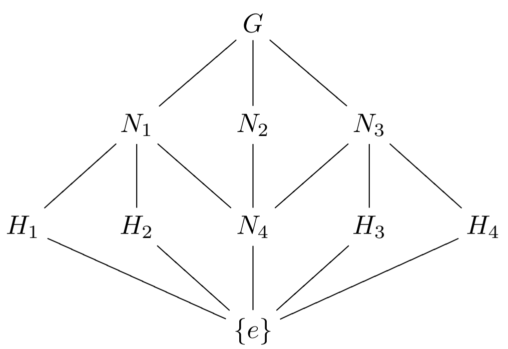
ב. תהי S חבורה פשוטה אינסופית. הוכיחו שאם $K \leq S$ תת־חבורה, אז $[S:K] = 1$ או $[S:K] = \infty$. רמז: העידון של משפט קיילי.

שאלה 5. תהי G חבורה סופית, ו-$N \lhd G$ תת־חבורה נורמלית כך ש $(|N|, [G\colon N]) = 1$.
הוכיחו בעזרת משפטי האיזומורפיזם שאין ב-G עוד תת־חבורה מסדר $|N|$. (רמז: הוכיחו ש$[H : H \cap N] = 1$ לכל תת־חבורה H מסדר $|N|$.)

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 6. תהי חבורה G עם סריג תת־החבורות הבא:



כאשר $H_i \leq G$ ו-$N_i \lhd G$. הוכיחו כי $G \cong D_4$.
רמז: סמנו $k = [G : N_1]$ והשתמשו כמה פעמים במשפטי האיזומורפיזמים. כנראה בדרך תצטרכו להוכיח ש-k ראשוני, ואז מוכרח להיות $k = 2$.

בהצלחה!