תירגול 2 - חקירת פונקציות

2 במרץ 2014

חקירת פונקציה מורכבת מהסעיפים הבאים:

1. תחום הגדרה
2. זוגיות/אי זוגיות
3. חיתוך עם הצירים
4. תחומי עליה/ירידה ונקודות קיצון
5. קעירות/קמירות ונקודות פיתול
6. אסימפטוטות
7. התנהגות הפונקציה ב $\pm\infty$
8. שרטוט הפונקציה

דוגמא מספר 1 - $f(x) = x^2 - 6x + 5$

תחום הגדרה

הגדרה: תהא $f(x)$ פונקציה. תחום ההגדרה של $f(x)$ היא A - אוסף כל הנקודות בהם $f(x)$ מוגדרת
דוגמא: תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא כל הישר $\mathbb{R}$

זוגיות/אי זוגיות

הגדרה: $f(x)$ תקרא זוגית אם $f(x) = f(-x)$
הגדרה: $f(x)$ תקרא זאי וגית אם $f(x) = -f(-x)$
דוגמא: $f(-x) = x^2 + 6x + 5 \neq \pm f(x)$ ולכן $f(x)$ אינה זוגית ואינה אי זוגית

חיתוך עם הצירים

החיתוך עם ציר x הן הנקודות $(1, 0).(5.0)$
החיתוך עם ציר y היא הנקודה $(0, 5)$

נקודות קיצון ותחומי עליה/ירידה

הגדרה: תהא $f(x)$ פונקציה. נאמר ש $f(x)$ עולה (יורדת) בתחום U אם : $\forall x < y \in U$
$f(x) \leq f(y)$ ($\forall x < y \in U :\ f(x) \geq f(y)$)
הגדרה: תהא $f(x)$ פונקציה. x_0 תקרא נקודת קיצון- מקס' (או מינ') אם קיימת לה סביבה U
כך ש $\forall x \in U : f(x) \leq f(x_0)$ (או $\forall x \in U : f(x) \geq f(x_0)$).
משפט: אם $f(x)$ גזירה בנקודת קיצון x_0 אזי $f'(x_0) = 0$
מסקנה: בשביל למצוא נקודות קיצון של $f(x)$ מספיק לבדוק מתי $f'(x) = 0$ או מתי הנגזרת אינה קיימת כלל.
דוגמא - נמצא את הנקודות האפשריות לנקודות קיצון ל $f(x)$:
$f'(x) = 2x - 6$ ולכן הנקודה החשודה היחידה היא $x_0 = 3$

מקס' או מיני'

איך יודעים אם מדובר בנקודות קיצון ואם מדובר בקיצון מקס' או בקיצון מיני'?

1. בדיקת הפונצקיה עצמה- הנקודות החשודות מחלקות את הישר לקטעים. נציב בכל קטע נקודה ונבדוק מה מתקבל:
למשל נציב $f(0) = 5\,, f(3) = -4, f(6) = 5$
ולכן 3 נקודת מיני
הערה: אכן מספיק לבדוק נקו' אלו - כי אם הפונצקיה היתה מחליפה מיקום (ביחס לנקודות החשודות) איפה שהוא אזי היתה נוצרת נקו' קיצון ואז היינו מגלים אותה בשלב הקודם.

2. בדיקת ערכי הנגזרת- נבדוק את סימן הנגזרת מימין ומשמאל לנקודות (מסתמך על העובדה כי : אם $f'(x) \leq 0$ בקטע I אזי הפונקציה יורדת שם. אם $f'(x) \geq 0$ אז הפונקציה עולה שם):
$f'(0) < 0\,, f'(4) > 0$
ולכן משמאל ל 3 הפונקציה יורדת ומימין ל 3 היא עולה ולכן 3 נקודות מיני'
הערה: בשלב זה מצב כי תחום העליה של f הוא $(3.\infty]$ ותחום הירידה $[3,\infty-)$
הערה: אכן מספיק לבדוק נקו' אלו - כי אם הנגזרת היתה מחליפה איפה שהוא את סימנה אזי היתה נוצרת נקו' קיצון ואז היינו מגלים אותה בשלב הקודם.

3. מבחן הנגזרת השניה- אם $f'(x_0) = 0$ ומתקיים $f''(x_0) > 0$ (או $f''(x) < 0$) אז x_0 נקודות מיני' (או מקס'):
אצלנו $f''(x) = 2$ ולכן $f''(2) > 0$

תחומי קעירות/קמירות ונקודות פיתול

תהא $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 אזי נאמר שהפונצקיה קעורה כלפי מעלה (כלפי מטה) ב x_0 אם קיימת סביבה U של x_0 כך שלכל $x \in U$ מתקיים:
$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ($f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$)
נאמר ש x_0 נקודת פיתול אם קיימת סביבה U ימנית בה $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ וסביבה שמאלית V בה $f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ או להיפך.
משפט: $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$) אז $f(x)$ קעורה כלפי מעלה (כלפי מטה) ב-x_0.
משפט: הנקודות החשודות לפיתול הם הנקודות בהם $f''(x)$ אינה קיימת או ש $f''(x) = 0$
דוגמא: $f''(x) = 2$ ולכן אין נקודות פיתול והפונקציה קעורה כלפי מעלה בכל הישר.

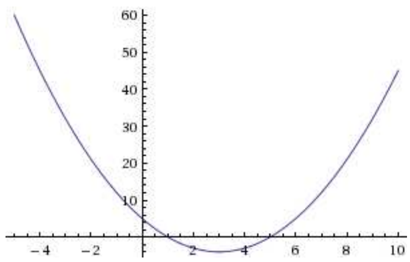
אסימטוטות

הגדרה: אסימטוטה אנכית ל $f(x)$ היא קו מהצורה $x=a$ כך שמתקיים $lim_{x\to a}|f(x)|=\infty$.
אצלנו אין אסימטוטה אנכית.
הגדרה: אסימטוטה אופקית היא ישר $l(x)=ax+b$ המקיים $lim_{x\to\infty}|f(x)-l(x)|=0$ או $lim_{x\to-\infty}|f(x)-l(x)|=0$
איך מוצאים ? מתקיים
$a=lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ ואז
$b=lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)$
דוגמא־ אצלנו:
$a=lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+5}{x}=\infty$ ולכן אין אסימטוטה אופקית

התנהגות הפונצקיה באינסוף

עבור הדוגמא שלנו $lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\infty$

ציור הפונקציה



דוגמא 2: $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$

תחום הגדרה

$x>0$ כי $\ln(x)$ לא מוגדרת עבור x־ים שליליים.

זוגיות/אי זוגיות

לא שייך בגלל תחום ההגדרה.

חיתוך עם הצירים

החיתוך עם ציר x הוא $(1,0)$
החיתוך עם ציר y לא קיים בגלל תחום ההגדרה

נקודות קיצון ותחומי עליה/ירידה

$f'(x)=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$ ולכן יש לה נקודה חשודה ב $x=e$.
הסימן של $f"$ נקבע ע"י $-x-2x(1-\ln(x))=-x(3-2\ln(x))$
$f(e)<0$, ולכן זוהי נקודת מקס'
תחומי העלייה של הפונקציה $(0,e)$
תחומי ירידה (e,∞)

תחומי קעירות/קמירות ונקודות פיתול

הסימן של $f"$ נקבע ע"י $-x(3-2\ln(x))$ ולכן נקודות חשודות לפיתול הם $e^{3/2}$
$f"(e)<0, f"(e^4)>0$ ולכן $e^{3/2}\approx 10$ נקודת פיתול
הפונקציה קעורה כלפי מטה ב $\left(0,e^{3/2}\right)$
הפונצקיה קעורה כלפי מעלה ב $\left(e^{3/2},\infty\right)$

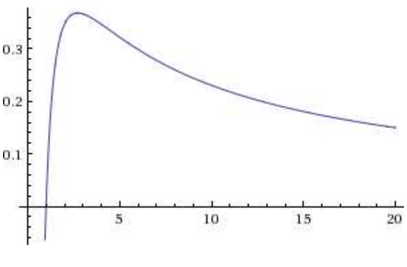
אסימטוטות

אסימטוטה אנכית ב $x=0$ כיוון ש $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$
אסימטוטה אופקית:
$a=lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}=lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=0$
$b=lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=lim_{x\to}\frac{\ln(x)}{x}=0$
ולכן $l(x)=0$ אסימטוטה אופקית

התנהגות הפונצקיה באינסוף

עבור הדוגמא שלנו $lim_{x\to\infty}f(x)=0$

ציור הפונקציה



דוגמא 3: $f(x)=\frac{x^3}{12-x^2}$

תחום הגדרה

תחום ההגדרה של הוא $x\neq\pm\sqrt{12}$

זוגיות/אי זוגיות

$f(-x)=\frac{-x^3}{12-x^2}=-f(x)$ ולכן $f(x)$ אי זוגית

נקודות קיצון

$f'(x) = \frac{3x^2(12-x^2)+2x^4}{(12-x^2)^2} = \frac{x^2(36-x^2)}{(12-x^2)^2}$ ולכן הנקודות החשודות הן $x_0 = 0, \pm 6, \pm\sqrt{12}$ (נשים לב שהנקודות $\pm\sqrt{12} = \pm 3.464$ אינן נקודות קיצון כי אינן בתחום ההגדרה).

מקס' או מיני'

איך יודעים אם מדובר בנקודות קיצון ואם מדובר בקיצון מקס' או בקיצון מיני'?

1. בדיקת הפונצקיה עצמה־ הנקודות החשודות מחלקות את הישר לקטעים. נציב בכל קטע נקודה ונבדוק מה מתקבל:
למשל נציב $f(-7) = 9.27, f(-6) = 9, f(-4) = 16, f(-1) = -0.09, f(0) = 0, f(1) = 0.09, f(4) = -16, f(6) = -9, f(7) = -9.27$
ולכן 0 אינה נקודת קיצון, -6 נקודת מיני ו 6 נקודות מקס'
הערה: אכן מספיק לבדוק נקו' אלו ־ כי אם הפונצקיה היתה מחליפה מיקום (ביחס לנקודות החשודות) איפה שהוא אזי היתה נוצרת נקו' קיצון ואז היינו מגלים אותה בשלב הקודם.

2. בדיקת ערכי הנגזרת־ נבדוק את סימן הנגזרת מימין ומשמאל לנקודות (מסתמך על העובדה כי : אם $f'(x) \leq 0$ בקטע I אזי הפונקציה יורדת שם. אם $f'(x) \geq 0$ אז הפונקציה עולה שם): נשים לב שסימן הנגזרת נקבע לפי החלק של $36 - x^2$
$f'(-7) < 0, f'(-6) = 0, f'(-4) > 0, f'(-1) > 0, f'(0) = 0, f'(1) > 0, f'(4) > -, f'(6) = 0, f'(7) < 0$
ולכן מימין ל -6 הפונקציה יורדת ומימין ל -6 היא עולה ולכן -6 נקודות מיני' וכו'
הערה: אכן מספיק לבדוק נקו' אלו ־ כי אם הנגזרת היתה מחליפה איפה שהוא את סימנה אזי היתה נוצרת נקו' קיצון ואז היינו מגלים אותה בשלב הקודם.

3. מבחן הנגזרת השניה־ אם $f'(x_0) = 0$ ומתקיים $f"(x_0) > 0$ (או $f"(x) < 0$) אז x_0 נקודות מיני' (או מקס'): הסימן של הנגזרת השניה בנקודה x הוא

$$\begin{aligned}(72x-4x^3)(12-x^2)^2+4x(12-x^2)x^2(36-x^2) &= x(12-x^2)[(72-4x^2)(12-x^2)+4x^2(36-x^2)] \\ &= x(12-x^2)[72\cdot 12+24x^2] \\ &= 24x(12-x^2)[36+x^2]\end{aligned}$$

$f"(6) < 0, f"(-6) > 0$
$f"(0) = 0$ ולכן לא ניתן לדעת לפי בדיקה זאת!

תחומי קעירות/קמירות ונקודות פיתול

דוגמא: $f(x) = \frac{x^3}{12-x^2}$ אזי $f'(x) = \frac{3x^2(12-x^2)+2x^4}{(12-x^2)^2} = \frac{x^2(36-x^2)}{(12-x^2)^2}$ ו $f"(x) = \frac{24x(12-x^2)[36+x^2]}{(12-x^2)^4}$
הנקודות החשודות לפיתלול הם $0, \pm\sqrt{12}$ הסימן של $f"(x)$ נקבע לפי החלק $x(12-x^2)$
נבדוק $f"(-4) > 0, f"(-1) < 0, f(0) = 0, f(1) > 0, f(4) < 0$. ומכאן מסיקים כי
בקטע $(-\infty, -\sqrt{12})$ הפונצקיה קעורה כלפי מעלה
בקטע $(-\sqrt{12}, 0)$ הפונצקיה קעורה כלפי מטה
בקטע $(0, \sqrt{12})$ הפונצקיה קעורה כלפי מעלה

בקטע $(\sqrt{12},\infty)$ הפונצקיה קעורה כלפי מטה
ובנקודה 0 יש נקודות פיתול (כי הנגזרת השניה שלילית עד אליה וחיובית ממנה)

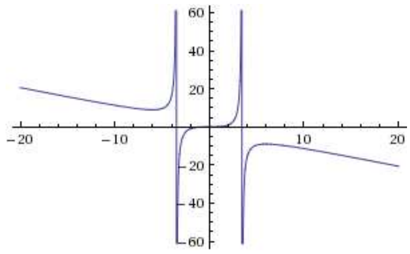
אסימטוטות

הגדרה: אסימטוטה אנכית ל $f(x)$ היא קו מהצורה $x=a$ כך שמתקיים $lim_{x\to a}|f(x)|=\infty$.
דוגמא $f(x)=\frac{x^3}{12-x^2}$ יש 2 אסימטוטות אנכיות ב $x=\pm\sqrt{12}$
כי $lim_{x\to-\sqrt{12}^+}f(x)=lim_{x\to\sqrt{12}^+}f(x)=-\infty$
$lim_{x\to-\sqrt{12}^-}f(x)=lim_{x\to\sqrt{12}^-}f(x)=\infty$
הגדרה: אסימטוטה אופקית היא ישר $l(x)=ax+b$ המקיים $lim_{x\to\infty}|f(x)-l(x)|=0$
או $lim_{x\to-\infty}|f(x)-l(x)|=0$
מתקיים $a=lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ ואז $b=lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)$
דוגמא: $f(x)=\frac{x^3}{12-x^2}$ נמצא אסימטוטות:
$a=lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(12-x^2)}=-1$
$b=lim_{x\to\infty}(\frac{x^3}{12-x^2}+x)=lim_{x\to\infty}(\frac{12x}{12-x^2})=0$
באותו אופן גם אסימטוטה לכיוון $x\to-\infty$ תצא אותו דבר.
ולכן $l(x)=-x$ אסימטוטה אנכית

התנהגות הפונצקיה באינסוף

עבור הדוגמא שלנו $lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{12-x^2}=-\infty, lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{12-x^2}=\infty$

ציור הפונקציה



משפטים לסיכום

1. אם $f(x)$ גזירה בנקודת קיצון x_0 אזי $f'(x_0)=0$
2. מבחן הנגזרת השניה- אם $f'(x_0)=0$ ומתקיים $f"(x_0)>0$ (או $f"(x)<0$) אז x_0 נקודות מיני' (או מקס')
3. אם $f'(x)\le 0$ בקטע I אזי הפונקציה יורדת שם. אם $f'(x)\ge 0$ אז הפונקציה עולה שם

4. אם $f"(x_0) > 0$ ו$f"(x_0) < 0$) אז $f(x)$ קעורה כלפי מעלה (כלפי מטה) ב־x_0.

מסקנה: הנקודות החשודות לפיתול הם הנקודות בהם $f"(x)$ אינה קיימת או ש $f"(x) = 0$

תשובות לתרגיל 1־ אינפי 2

שאלה 1

סעיף א

$$f(x) = x - 2\arctan x$$

תחום הגדרה:הפונקציה מוגדרת על כל $\mathbb{R}$.
קל לראות שהפונקציה אי זוגית. כי

$$f(-x) = -x - 2\arctan(-x) = -x + 2\arctan x = -f(x)$$

לכן נסתכל רק על האיזור שבו $x > 0$
נקודות קיצון ותחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = 0$$

נקבל ש $x = \pm 1$ כך שאם $|x| > 1$ נקבל ש $f'(x) > 0$ ולכן הפונקציה עולה.
עבור $|x| < 1$ נקבל שהפונקציה יורדת.
לכן $(1, 1 - \frac{\pi}{2})$ היא נקודת מינימום (וכמובן $(-1, -1 + \frac{\pi}{2})$ היא נקודת מקסימום).
תחומי קעירות/קמירות:

$$f''(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

ברור שאם $x > 0$ יש לנו קעירות ואם $x < 0$ יש לנו קמירות.
לכן $x = 0$ היא נקודת פיתול.
אסימפטוטות:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}(1 - \frac{2\arctan x}{x}) = 1$$

בדומה

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

אבל

$$\lim_{x\to\infty}(x - 2\arctan x - x) = -\pi$$

ו

$$\lim_{x\to-\infty}(x - 2\arctan x - x) = \pi$$

ולכן $y = x - \pi$ היא אסימטוטה ב ∞ ו $y = x + \pi$ היא אסימפטוטה ב $-\infty$.
נקודות חיתוך:
ברור ש $(0,0)$ היא נקודת חיתוך. לפי החקירה רואים שיש עוד שתי נקודות חיתוך עם ציר x למרות שקצת קשה לחשב את הערכים שלהם.

סעיף ב

$$f(x) = x^x$$

כאשר $x > 0$.
תחום הגדרה: מוגדרת בכל התחום $x > 0$.
זוגיות אי זוגיות: לא רלוונטי.
נקודות קיצון ותחומי עליה וירידה:
נזכור כי

$$(x^x)' = x^x(\ln x + 1)$$

אם נשווה

$$x^x(\ln x + 1) = 0$$

נקבל

$$\ln x = -1$$

כלומר

$$x = e^{-1}$$

בתחום שבו $x > e^{-1}$ נקבל שהפונקציה עולה ובתחום $x < e^{-1}$ נקבל שהפונקציה יורדת.
לכן $(e^{-1}, (e^{-e^{-1}}))$ היא נקודת מינימום.
נבדוק תחומי קעירות/קמירות: הנגזרת השניה היא:

$$x^x(\ln x + 1)^2 + x^x \frac{1}{x} > 0$$

ולכן הפונקציה תמיד קעורה.
חיתוך עם הצירים: נשים לב ש

$$\lim_{x \to 0} x^x = \lim_{x \to 0} e^{x \ln x} = 1$$

ולכן הפונקציה מתקרבת ל $(0, 1)$.
אין עוד חיתוכים.
אסימפטוטות:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^x}{x} = \infty$$

ולכן אין אסימפטוטות.

סעיף ג

$$f(x) = x + \sin 2x$$

הפונקציה מוגדרת בכל התחום.
קל לראות שהפונקציה אי זוגית.
נמצא תחומי עליה וירידה ונקודות קיצון:

$$f'(x) = 1 + 2\cos 2x = 0$$

נקבל

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}$$

כלומר

$$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$$

כלומר:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$$

אם נסתכל רק על התחום $0 < x < 2\pi$ (כי הפונקציה אי זוגית) נקבל את הנקודות

$$x \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$$

אם נבדוק תחומי עליה וירידה נקבל:
בתחום: $0 < x < \frac{\pi}{3}$ $f'(x) > 0$ ולכן הפונקציה עולה.
בתחום: $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ $f'(x) < 0$ ולכן הפונקציה יורדת.
בתחום: $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$ $f'(x) > 0$ ולכן הפונקציה עולה.
בתחום: $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$ $f'(x) < 0$ ולכן הפונקציה יורדת.
בתחום: $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$ $f'(x) > 0$ ולכן הפונקציה עולה.
ולכן נקודות הקיצון הן:
מקסימום:

$$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}), \quad (\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2})$$

מינימום:

$$(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}), \quad (\frac{5\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

נבדוק פיתול ותחומי קמירות/קעירות:

$$f''(x) = -4\sin 2x$$

אם נזכור שאנחנו מסתכלים רק על האיזור $0 < x < 2\pi$
אז קל לראות את תחומי הקעירות והקמירות:
בתחום: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ הפונקציה קעורה.
בתחום: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ הפונקציה קמורה.
בתחום: $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ הפונקציה קעורה.
בתחום: $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ הפונקציה קמורה.
מכאן קל לראות את נקודות הפיתול.

$$(0,0), \quad (\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}), \quad (\pi,\pi), \quad (\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$$

(את הנקודה $(2\pi,2\pi)$ לא נחשיב כנקודת פיתול כי היא בקצה התחום).
אסימפטוטות: אין.
נקודות חיתוך עם הצירים: קל לראות ש $x+\sin 2x = 0$ מתקיים כש $x = 0$.
אם נסתכל על נקודות המינימום שלנו (בתחום $x > 0$) נראה שכולן מעל ציר x ובשילוב עם הסתכלות על תחומי העליה וירידהת רואים שאין נקודות חיתוך נוספות.

סעיף ד

למעשה הפונקציה היא:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{x} & |x| \le 1 \\ \frac{x^2-1}{x} & |x| \ge 1 \end{cases}$$

תחום ההגדרה: $x \neq 0$.
קל לראות שהפונקציה אי זוגית. אז נסתכל רק על התחום $x \ge 0$.
נתחיל לחקור בתחום $0 \le x \le 1$, כלומר את הפונקציה

$$f(x) = \frac{1-x^2}{x} = \frac{1}{x} - x$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 < 0$$

הפונקציה תמיד יורדת.
נסתכל על הנגזרת השנייה

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$$

כלומר הפונקציה תמיד קמורה.

עכשיו נסתכל על הפונקציה בתחום $x \geq 1$ כלומר על הפונקציה

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x} = x - \frac{1}{x}$$

הנגזרת היא

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$$

כלומר הפונקציה תמיד עולה בתחום זה.
נסתכל על הנגזרת השניה

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3} < 0$$

כלומר הפונקציה תמיד קעורה.
כמובן שמתוך כל זה נסיק ש $(1,0)$ היא נקודת מינימום והיא גם נקודת פיתול. נשים לב שהפונקציה בכלל לא גזירה ב $x = 1$.
נסתכל על אסימפטוטות אנכיות:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - x = \infty$$

ולכן $x = 0$ היא אסימפטוטה אנכית. היא האסימפטוטה האנכית היחידה.
אסימפטוטות משופעות: כאן כמובן נסתכל על החלק של $x \geq 1$ כלומר

$$x - \frac{1}{x}$$

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} x - \frac{1}{x} - x = 0$$

כלומר $y = x$ היא אסימפטוטה משופעת.

סעיף ה

למעשה הפונקציה היא:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{1-x} & x > 1 \\ xe^{x-1} & 0 \leq x \leq 1 \\ -xe^{x-1} & x < 0 \end{cases}$$

אז צריך לעשות שלוש חקירות שונות בתחומים שונים.
כמו כן ברור שהפונקציה לא זוגית או אי זוגית.

בתחום $x > 1$ נקבל שהנגזרת היא:

$$f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x}$$

נקבל שבתחום שלנו $f'(x) < 0$ ולכן הפונקציה תמיד יורדת.
הנגזרת השניה היא:

$$f''(x) = -2e^{1-x} + xe^{1-x}$$

זה מתאפס ב $x = 2$. כש $x < 2$ הפונקציה שלילית (כלומר יש קמירות) וכאשר $x > 2$ הפונקציה חיובית כלומר יש קעירות.
נבדוק אם יש אסימטפוטה

$$\lim_{x \to \infty} xe^{1-x} = 0$$

ולכן $y = 0$ אסימטפוטה.
בתחום $0 < x < 1$ נקבל שהנגזרת היא:

$$f'(x) = e^{x-1} + xe^{x-1}$$

שזה גדול מ 0 לכל x.ולכן הפונקציה עולה בכל התחום הזה.
כמו כן,

$$f''(x) = 2e^{x-1} + xe^{x-1} > 0$$

ולכן הפונקציה קעורה בכל התחום.
בתחום $x < 0$ נקבל ש

$$f'(x) = -e^{x-1} - xe^{x-1}$$

שזה מתאפס כש $x = -1$. כאשר $x > -1$ זה ערך שלילי (כלומר הפונקציה יורדת) וכאשר $x < -1$ זה ערך חיובי (כלומר הפונקציה עולה)
נגזור פעמיים ונקבל:

$$f''(x) = -2e^{x-1} - xe^{x-1}$$

זה מתאפס כש $x = -2$. אם $x > -2$ נקבל ערך שלילי (קמור) ואם $x < -2$ הערך חיובי (קעור).
נמצא אסימפטוטה:

$$\lim_{x \to -\infty} -xe^{x-1} = 0$$

אז שוב $y = 0$ אסימפטוטה.
קל לראות ש $(0, 0)$ היא נקודת החיתוך היחידה עם הצירים.
לסיכום:

1. תחום הגדרה: כל $\mathbb{R}$.
2. זוגיות/אי זוגיות: אין.
3. חיתוך עם הצירים: $(0,0)$.
4. תחומי עליה וירידה:

(א) עליה: $x < -1, \quad 0 < x < 1$

(ב) ירידה: $-1 < x < 0, \quad 1 < x$

5. נקודות קיצון (מקומיות):

(א) מקסימום: $(-1, e^{-2}), \quad (1,1)$

(ב) מינימום: $(0,0)$

6. תחומי קעירות/קמירות:

(א) קעור: $x < -2, \quad 0 < x < 1, \quad 2 < x$

(ב) קמור: $-2 < x < 1, \quad 1 < x < 2$

7. נקדודות פיתול: $(-2, 2e^{-3}), \quad (2e^{-1})$ (נשים לב ש $(0,0)$ ו $(1,1)$ לא נחשבות נקודות פיתול למרות שבאמת הפונקציה משנה סוג קעירות וזה בגלל שהפונקציה לא גזירה בנקודות אלו. (קל לבדוק זאת).)
8. אסימפטוטות: $y = 0$ ב $\pm\infty$.

שאלה 2

סעיף א

נניח שהאורך הוא x והרוחב הוא y. ידוע ש $2x + 2y = a$ ורוצים ש xy יהיה מקסימלי. כלומר רוצים למצוא מקסימום גלובאלי של הפונקציה

$$f(x) = xy = x(\frac{a}{2} - x) = \frac{a}{2}x - x^2$$

כאשר הפונקציה מוגדרת על התחום $[0, \frac{a}{2}]$. לפי ווירשטראס קיים מקסימום גלובאלי והוא לא יכול להיות בקצוות כי $f(0) = f(\frac{a}{2}) = 0$ וזה הערך הכי נמוך של הפונקציה.

אז המקסימום הגלובאלי מתקבל במקום שבו הנגזרת מתאפסת

$$f'(x) = \frac{a}{2} - 2x$$

כלומר נקבל $x = \frac{a}{4}$ כלומר $y = \frac{a}{4}$ כלומר זה ריבוע.

סעיף ב

שוב נניח שהאורך הוא x והרוחב הוא y ואז ידוע ש $xy = a$ ורוצים ש $2x + 2y$ יהיה מינימאלי. כלומר רוצים למצוא מינימום גלובאלי ל

$$f(x) = 2x + 2y = 2x + 2\frac{a}{x}$$

כאשר תחום ההגדרה הוא $(0, \infty)$. נשים לב ש

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

ולכן מינימום גלובאלי קיים. והוא חייב להיות במקום בו הנגזרת מתאפסת

$$f'(x) = 2 - \frac{2a}{x^2}$$

כלומר צריך $x = \sqrt{a}$ כלומר $y = \sqrt{a}$ כלומר ריבוע.

שאלה 3

אם נסמן ב $(0, t)$ את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה y.
אז קל לחשב שמשוואת הישר צריכה להיות

$$y = \frac{4-t}{3}x + t$$

ולכן נקודת החיתוך עם ציר ה x היא:

$$x = \frac{3t}{t-4}$$

נקבל ששטח המשולש הוא:

$$f(t) = \frac{3}{2}\frac{t^2}{t-4}$$

כאשר הפונקציה מוגדרת על $(4, \infty)$ (נשים לב ש $4 < t$ אחרת אין משולש). אנחנו צריכים למצוא מינימום גלובאלי.
היות ש $\lim_{t \to \infty} f(t) = \infty$ ו $\lim_{t \to 4^+} f(t) = \infty$ ו $f(t)$ רציפה אז ל $f(t)$ יש מינימום גלובאלי (הוכחנו טענות כאלה באינפי 1). אין נקודות קצה ואין נקודות שבהן f לא גזירה אז המינימום הגלובאלי מתקבל בנקודה עם נגזרת 0.
אם נוותר על הקבוע $\frac{3}{2}$ ונגזור נקבל:

$$f'(t) = \frac{2t(t-4) - t^2}{(t-4)^2} = \frac{2t^2 - 8t - t^2}{(t-4)} = \frac{t(t-8)}{(t-4)^2}$$

נקבל שהנגזרת מתאפסת רק ב $t = 8$ ($t = 0$ זה מחוץ לתחום מבחינתנו). ובאמת אם $t > 8$ הנגזרת חיובית, ואם $t < 8$ הנגזרת שלילית ולכן זאת נקודת מינימום.

בנוסף זאת זאת הנקודה היחידה בתחום ההגדרה שהנגזרת מתאפסת ולכן זאת חייבת להיות נקודת מינימום גלובאלית, אז היא הנקודה שאנחנו מחפשים.
משוואת הישר היא:

$$y = -\frac{4}{3}x + 8$$

שאלה 4

ראשית נשים לב שהפונקציה

$$f(x) = 2x - \arccos\frac{1}{x}$$

מוגדרת רק בתחום $|x| \geq 1$.
ולכן יש טעם לדבר על אסימפטוטות רק ב $\pm\infty$.
נבדוק ונקבל ש:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} 2 - \frac{\arccos\frac{1}{x}}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 2 - \frac{\arccos\frac{1}{x}}{x} = 2$$

ו

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - 2x) = \lim_{x\to\infty} -\arccos\frac{1}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - 2x) = \lim_{x\to-\infty} -\arccos\frac{1}{x} = -1$$

ולכן האסימפטוטה ב $\pm\infty$ היא $2x - 1$.

פתרון תרגיל בית 2

שאלה 1

א. חקור באופן מלא (תחום הגדרה, אסימפטוטות, תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וצייר סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x^3-4}{x^2}$.

ב. לאילו ערכים של פרמטר a למשוואה $\frac{x^3-4}{x^2}=x+a$ אין שורשים ממשיים?

פתרון שאלה 1

א. תחום הגדרה – המכנה מתאפס כאשר $x^2=0$ ולכן תחום ההגדרה הוא $x\neq 0$.

אסימפטוטה אנכית – כאשר $x=0$ המכנה מתאפס ולכן הישר $x=0$ חשוד לאסימפטוטה אנכית.

$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3-4}{x^2}=-\infty,\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x^3-4}{x^2}=-\infty$ ולכן $x=0$ אסימפטוטה אנכית.

אסימפטוטה משופעת –

תזכורת:

אסימפטוטה משופעת

הישר $y=ax+b$ נקרא אסימפטוטה משופעת של הפונקציה $f(x)$ ב $+\infty$ אם $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$.

הישר הנ"ל ייקרא אסימפטוטה משופעת ב $-\infty$ אם $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$.

במקרה המיוחד $a=0$ האסימפטוטה נקראת גם האסימפטוטה האופקית של $f(x)$.

משפט

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע (a,∞). אם קיימים הגבולות $a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]$

אז הישר $y=ax+b$ הוא האסימפטוטה המשופעת היחידה ב $+\infty$ של $f(x)$.

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע $(-\infty,c)$. אם קיימים הגבולות $a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]$

אז הישר $y=ax+b$ הוא האסימפטוטה המשופעת היחידה ב $-\infty$ של $f(x)$.

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-4}{x\cdot x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-4}{x^3}=1,b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3-4}{x^2}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3-4-x^3}{x^2}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-4}{x^2}\right]=0$$

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{x\cdot x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{x^3}=1,b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-4}{x^2}-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-4-x^3}{x^2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-4}{x^2}\right]=0$$

האסימפטוטה המשופעת ב $-\infty$ וב $+\infty$ היא $y=x$.

נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה.

נבדוק תחילה לאילו ערכי x הנגזרת מתאפסת:

$$f(x)=\frac{x^3-4}{x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2\cdot x^2-2x\cdot\left(x^3-4\right)}{x^4}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^4+8x}{x^4}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^3+8}{x^3} .$$

הנגזרת מאפסת כאשר $x^3+8=0$ כלומר כאשר $x=-2$.

נבדוק תחומי עלייה וירידה:

	x	$x<$	-2	$<x<$	0	$<x$

$f(x)$	עולה		יורד		עולה
$f'(x)$	חיובי	0	שלילי		חיובי

נקודת מקסימום $(-2,-3)$.

תחומי עלייה $x>0$ או $x<-2$.

תחומי ירידה $-2<x<0$.

נמצא נקודות פיתול:

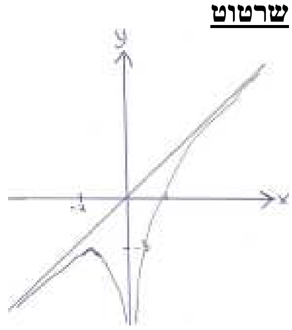
נשווה את הנגזרת השנייה לאפס

$$f'(x)=\frac{x^3+8}{x^3}\Rightarrow f''(x)=\frac{3x^2\cdot x^3-3x^2\cdot\left(x^3+8\right)}{x^6}\Rightarrow f''(x)=\frac{-24x^2}{x^6}\Rightarrow f''(x)=\frac{-24}{x^4}.$$

הנגזרת השנייה לא מתאפסת ולכן אין נקודות פיתול.

הנגזרת השנייה שלילית בכל תחום הגדרת הפונקציה ולכן הפונקציה קעורה כלפי מטה לכל x.

<u>שרטוט</u>



ב. על פי השרטוט ניתן לראות שכל הפונקציה מתחת לישר $y=x$ ולכן כאשר $a>0$ אין פתרון למשוואה $\frac{x^3-4}{x^2}=x+a$.

<u>שאלה 2</u>

א. חקור באופן מלא (תחום הגדרה, אסימפטוטות, תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וצייר סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-3}{|x|-2}$.

ב. לאילו ערכים של פרמטר a למשוואה $f(x)=a$ אין פתרון ממשי?

<u>פתרון שאלה 2</u>

א. תחום הגדרה: כאשר המכנה מתאפס הפונקציה לא מוגדרת.

$|x|-2\neq 0 \Leftarrow |x|\neq 2 \Leftarrow x\neq 2, x\neq -2$.

אסימפטוטות אנכיות – הפונקציה לא מוגדרת כאשר $x=2, x=-2$ ולכן הישרים $x=2, x=-2$ יכולים להיות אסימפטוטות אנכיות.

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-3}{|x|-2}=+\infty,\ \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-3}{|x|-2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{x^2-3}{|x|-2}=-\infty,\ \lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-3}{|x|-2}=-\infty$$

סה"כ קיבלנו ש $x=2, x=-2$ אסימפטוטות אנכיות.

אסימפטוטות משופעות – כאשר $x>0$ נקבל ש $|x|=x$ ולכן עבור $x\to+\infty$ ניתן להסתכל על הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-3}{x-2}$.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3}{x\cdot(x-2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3}{x^2-2x}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-3}{x-2}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-3-x^2+2x}{x-2}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x-3}{x-2}\right]=2$$

האסימפטוטה המשופעת ב $x\to+\infty$ היא $y=x+2$.

כאשר $x<0$ נקבל ש $|x|=-x$ ולכן עבור $x\to-\infty$ ניתן להסתכל על הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-3}{-x-2}$.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3}{x\cdot(-x-2)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3}{-x^2-2x}=-1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\cdot(-1)x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-3}{-x-2}+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-3}{-x-2}+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-3-x^2-2x}{-x-2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-2x-3}{-x-2}\right]=2$$

האסימפטוטה המשופעת ב $x\to-\infty$ היא $y=-x+2$.

נקודות קיצון – נבדוק עבור $x>0$ ואז $f(x)=\frac{x^2-3}{x-2}$.

נגזור נשווה לאפס:

$$f(x)=\frac{x^2-3}{x-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x\cdot(x-2)-1\cdot(x^2-3)}{(x-2)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

הנגזרת מתאפסת כאשר $x=1,x=3$ ולכן הן נקודות חשודות לקיצון.

נבדוק תחומי עלייה וירידה והאם הנקודות החשודות הן קיצון.

x	0	$<x<$	1	$<x<$	2	$<x<$	3	$<x$
$f(x)$		עולה	מקסימום	יורד		יורד	מינימום	עולה
$f'(x)$		חיובי	0	שלילי		שלילי	0	חיובי

$(1,2)$ מקסימום, $(3,6)$ מינימום.

נבדוק עבור $x<0$ ואז $f(x)=\frac{x^2-3}{-x-2}$.

נגזור נשווה לאפס:

$$f(x)=\frac{x^2-3}{-x-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x\cdot(-x-2)+1\cdot(x^2-3)}{(-x-2)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-2x^2-4x+x^2-3}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-x^2-4x-3}{(x-2)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-(x+1)(x+3)}{(x-2)^2}$$

הנגזרת מתאפסת כאשר $x=-1,x=-3$ ולכן הן נקודות חשודות לקיצון.

נבדוק תחומי עלייה וירידה והאם הנקודות החשודות הן קיצון.

x	$x<$	-3	$<x<$	-2	$<x<$	-1	$<x<$	0
$f(x)$	יורד	מינימום	עולה		עולה	מקסימום	יורד	
$f'(x)$	שלילי	0	חיובי		חיובי	0	שלילי	

$(-1,2)$ מקסימום, $(-3,6)$ מינימום, $(0,1.5)$.מינימום.

תחומי עלייה: $-3<x<-2, -2>x>-1, 0<x<1, 3<x$
תחומי ירידה: $x<-3, -1<x<0, 1<x<2, 2<x<3$.
נקודות פיתול:
הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-3}{|x|-2}$ היא פונקציה זוגית מכיוון ש $f(a)=\frac{a^2-3}{a-2}=\frac{(-a)^2-3}{|-a|-2}=f(-a)$.
מספיק לבחון נקודות פיתול עבור $0<x$.
נחשב את הנגזרת השנייה של $f(x)=\frac{x^2-3}{x-2}$.

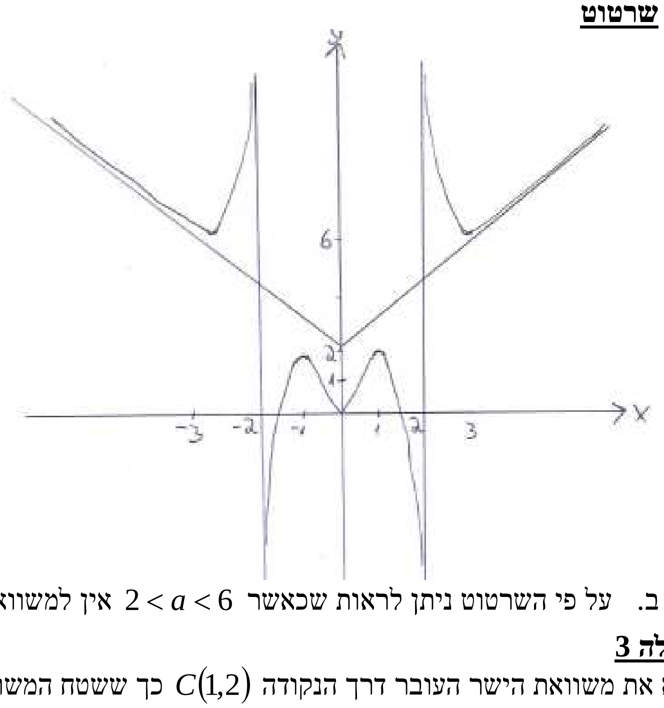
$$f(x)=\frac{x^2-3}{x-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2-4x+4-1}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(x-2)^2}{(x-2)^2}-\frac{1}{(x-2)^2}\Rightarrow f'(x)=1-(x-2)^{-2}\Rightarrow f''(x)=\frac{2}{(x-2)^3}$$

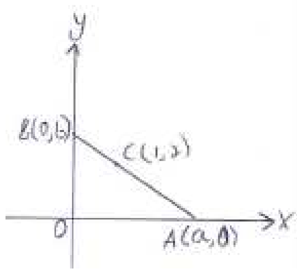
הנגזרת השנייה לא מתאפסת ולכן אי נקודות פיתול.
נבדוק תחומי קמירות כלפי מטה וכלפי מעלה. נשים לב שאם הפונקציה זוגית אז גם הנגזרת השנייה זוגית ואז ניתן להסיק תחומי קמירות כלפי מטה וכלפי מעלה גם עבור $x<0$.

x	$x<$	-2	$<x<$	0	$<x<$	2	$<x$
$f(x)$	מעלה		מטה		מטה		מעלה
$f''(x)$	חיובי		שלילי		שלילי		חיובי

תחומי קמירות כלפי מעלה: $x<-2, 2<x$.
תחומי קמירות כלפי מטה: $-2<x<0, 0<x<2$.
שרטוט



ב. על פי השרטוט ניתן לראות שכאשר $2<a<6$ אין למשוואה $f(x)=a$ פתרונות ממשיים.
שאלה 3
מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה $C(1,2)$ כך ששטח המשולש הנמצא ברביע הראשון החסום ע"י הישר הנ"ל ושני צירי המערכת (ציר ה x וציר ה y) יהיה מינימאלי.
פתרון שאלה 3



נחשב את שטח המשולש AOB באמצעות a.

נשים לב ש $m_{AC}=m_{BC} \Leftarrow \frac{b-2}{-1}=\frac{2}{1-a} \Leftarrow b=2-\frac{2}{1-a}$.

הפונקציה המתארת את שטח המשולש היא $S_{AOB}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(2-\frac{2}{1-a}\right)=a-\frac{a}{1-a}$

$f(a)=a-\frac{a}{1-a}$. נגזור את הפונקציה ונשווה לאפס.

$$f(a)=a-\frac{a}{1-a}\Rightarrow f'(a)=1-\frac{1\cdot(1-a)-(-1)\cdot a}{(1-a)^2}\Rightarrow f'(a)=1-\frac{1}{(1-a)^2}$$

.

$$1-\frac{1}{(1-a)^2}=0\Rightarrow(1-a)^2=1\Rightarrow a=2\vee a=0$$

$a=0$ נפסל.

$a=2$ חשוד לקיצון. נגזור פעם שנייה

$$f'(a)=1-\frac{1}{(1-a)^2}\Rightarrow f'(a)=1-(1-a)^{-2}\Rightarrow f''(a)=-(-2)(1-a)\cdot(-1)=2a-2\Rightarrow f''(2)=2>0$$

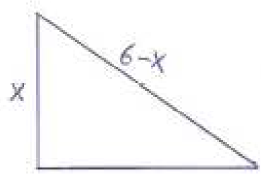
ולכן עבור $a=2$ נקבל שטח מינימאלי.

הישר עובר דרך הנקודות $(1,2),(2,0)$ ולכן משוואת הישר $y=-2x+4$.

<u>שאלה 4</u>

הוכח שבמשולש ישר זווית שבו סכום אורכי היתר ואחד הניצבים שווה ל 6, שטחו קטן מ 5.

<u>פתרון שאלה 4</u>



נחשב את שטח המשולש באמצעות x .

נחשב את הניצב השני באמצעות משפט פיתגורס. $\sqrt{(6-x)^2-x^2}=\sqrt{36-12x}$.

שטח המשולש הוא $S=\frac{1}{2}x\sqrt{36-12x}$.

נגזור את הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x\sqrt{36-12x}$ ונקבל

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{2}\sqrt{36-12x}+\frac{x}{2}\cdot\frac{-12}{2\sqrt{36-12x}}\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{\sqrt{36-12x}}{2}-\frac{3x}{\sqrt{36-12x}}$$

$$\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{\left(36-12x\right)-6x}{2\sqrt{36-12x}}\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{36-18x}{2\sqrt{36-12x}}$$

הנגזרת שווה לאפס כאשר $x=2$.

המכנה חיובי ולכן ניתן לבדוק את סימן הנגזרת השנייה של המונה בלבד. הנגזרת של המונה היא -18 ולכן כאשר $x=2$ נקבל שטח מקסימאלי.

$f\left(2\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{36-12\cdot 2}=\sqrt{12}<5$.

<u>שאלה 5</u>

הוכח כי לכל $x>0$ $x>\ln\left(1+x\right)$.

<u>פתרון שאלה 5</u>

נראה שהערך הקטן ביותר של הפונקציה $g\left(x\right)=x-\ln\left(1+x\right)$ בתחום $x\geq 0$ הוא אפס.

$g'\left(x\right)=1-\frac{1}{1+x}\Rightarrow g'\left(x\right)=\frac{x}{1+x}$ לכל $x>0$ נקבל ש $g'\left(x\right)>0$ ולכן הפונקציה עולה ממש לכל $x>0$. מכיוון ש $g\left(0\right)=0$ נקבל שלכל $x>0$ $g\left(x\right)>0$ ואז $x>\ln\left(1+x\right)$.

<u>שאלה 6</u>

חשב את האינטגרליים הבאים השתמש באינטגרליים המיידים:

א. $\int\frac{9^x-4^x}{3^x-2^x}dx$.

ב. $\int\frac{11}{\sqrt[3]{4-5x}}dx$.

ג. $\int\frac{x^2+4x+5}{x+4}dx$.

ד. $\int\sin x\cos 5x dx$

ה. $\int\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^2dx$

<u>פתרון שאלה 6</u>

<u>סעיף א</u>

$$\int\frac{9^x-4^x}{3^x-2^x}dx=\int\frac{\left(3^x-2^x\right)\cdot\left(3^x+2^x\right)}{3^x-2^x}dx=\int\left(3^x+2^x\right)dx=\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{2^x}{\ln 2}+c \ .$$

<u>סעיף ב</u>

$$\int\frac{11}{\sqrt[3]{4-5x}}dx=\int 11\cdot\left(4-5x\right)^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{11}{-5}\cdot\frac{3}{2}\left(4-5x\right)^{\frac{2}{3}}+c=-\frac{33}{10}\sqrt[3]{\left(4-5x\right)^2}+c \ .$$

סעיף ג

$$\int\frac{x^2+4x+5}{x+4}dx=\int\left(\frac{x(x+4)}{x+4}+\frac{5}{x+4}\right)dx=\int\left(x+\frac{5}{x+4}\right)dx=\frac{x^2}{2}+5\ln|x+4|+c.$$

סעיף ד

נשתמש בזהויות $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$

$$\int\sin x\cos 5xdx=\int\frac{1}{2}(\sin 6x+\sin(-4x))dx=\int\frac{1}{2}(\sin 6x-\sin(4x))dx=-\frac{1}{12}\cos 6x+\frac{1}{4}\cos 4x+c$$

סעיף ה

$$\int\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^2dx=\int\left(1+2x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{4}{3}}\right)dx=x+\frac{6x^{\frac{5}{3}}}{5}+\frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7}+c$$

שאלה 7

חשב את האינטגרליים הבאים בעזרת שיטת ההצבה:

א. $\int\frac{\sin(\ln x)}{x}dx$.

ב. $\int x^3\sqrt{x^4+1}dx$.

ג. $\int\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$.

פתרון שאלה 7

סעיף א

נציב $t=\ln x \Leftarrow dt=\frac{dx}{x}$. $\int\sin tdt=-\cos t=-\cos(\ln x)+c$.

סעיף ב

נציב $t=x^4+1 \Leftarrow dt=4x^3dx$. $\int x^3\sqrt{x^4+1}dx=\frac{1}{4}\int\sqrt{t}dt=\frac{2t\sqrt{t}}{6}=\frac{2(x^4+1)\sqrt{x^4+1}}{6}+c$.

סעיף ג

נציב $x=t^6\Rightarrow dx=6t^5dt$

$\int\frac{t^6\cdot 6t^5}{t^3+t^2}dt=\int\frac{6t^9}{1+t}dt$ ומכאן מבצעים חלוקת פולינומים ופותרים.

שאלה 8

חשב את האינטגרלים הבאים בעזת שיטת אינטגרציה בחלקים:

א. $\int x^3\ln xdx$.

ב. $\int\frac{2x}{\sqrt{x-1}}dx$.

ג. $\int\arctan xdx$.

ד. $\int e^x\sin(2x)dx$.

ה. $\int x\cos xdx$.

ו. $\int \sqrt[3]{x}\ln x dx$.

<u>פתרון שאלה 8</u>

<u>סעיף א</u>

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$u=\ln x \quad v=\frac{x^4}{4}$$
$$u'=\frac{1}{x} \quad v'=x^3$$

$$\int x^3\ln x dx=\frac{x^4\ln x}{4}-\int\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^4\ln x}{4}-\int\frac{x^3}{4}dx=\frac{x^4\ln x}{4}-\frac{x^4}{16}+c.$$

<u>סעיף ב</u>

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים

$$v=2(x-1)^{0.5} \quad u=2x$$
$$v'=(x-1)^{-0.5} \quad u'=2$$

$$\int\frac{2x}{\sqrt{x-1}}dx=4x\sqrt{x-1}-\int 4(x-1)^{\frac{1}{2}}dx=4x\sqrt{x-1}-\frac{8(x-1)\sqrt{x-1}}{3}+c.$$

<u>סעיף ג</u>

נסמן $u=\arctan x$, $v'=1$ ואז $u'=\frac{1}{1+x^2}$, $v=x$.

נשתמש בנוסחה $\int uv'dx=uv-\int u'vdx$ ונקבל

$$\int\arctan x dx=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx.$$

נשאר לנו לפתור את האינטגרל הבא $\int\frac{x}{1+x^2}dx$.

נבחר בהצבה $t=x^2$ ואז $dt=2xdx$.

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t}=\frac{1}{2}\ln|1+t|=\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

$$\int\arctan x dx=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+c.$$

<u>סעיף ד</u>

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$u=\sin(2x) \quad v=e^x$$
$$u'=2\cos(2x) \quad v'=e^x$$

$$\int e^x\sin(2x)dx=e^x\sin(2x)-2\int e^x\cos(2x)dx.$$

נשאר לחשב את האינטגרל $\int e^x\cos(2x)dx$.

ניעזר שוב באינטגרציה בחלקים:

$$u=\cos(2x) \quad v=e^x$$
$$u'=-2\sin(2x) \quad v'=e^x$$

$$\int e^x \cos(2x)\,dx = e^x \cos(2x) + 2\int e^x \sin(2x)dx$$

נציב במשוואה שקיבלנו קודם

$$\int e^x \sin(2x)dx = e^x \sin(2x) - 2\cdot\left(e^x \cos(2x) + 2\int e^x \sin(2x)dx\right)$$

$$\int e^x \sin(2x)dx = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4\int e^x \sin(2x)dx$$

$$5\int e^x \sin(2x)dx = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x)$$

$$\int e^x \sin(2x)dx = \frac{1}{5}e^x \sin(2x) - \frac{2}{5}e^x \cos(2x) + c$$

<u>סעיף ה</u>

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$u = x \quad v = \sin x$$

$$u' = 1 \quad v' = \cos x$$

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + c$$

<u>סעיף ו</u>

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$u = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} \quad v = \ln x$$

$$u' = x^{\frac{1}{3}} \quad v' = \frac{1}{x}$$

$$.\int \sqrt[3]{x}\ln x dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\ln x - \frac{3}{4}\int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\ln x - \frac{9}{16}x^{\frac{4}{3}} + c$$