תרגיל תיאורטי מספר 2

1. תהי $A \in F^{n\times n}$. הוכח/הפרך:

א. אם יש $n \in N$ כך ש-A^n הפיכה, אז A הפיכה.

נכון. $A^nB = I \leftarrow A(A^nB) = I$

ב. אם $A^2 = I$ אז $A = \alpha I$ עבור $\alpha \in F$ כלשהו.

לא נכון. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ג. אם לכל $b \in F^n$ יש פתרון למערכת $Ax{=}b$ אז A הפיכה.

נכון. יש פתרון ל-$Ax = e_i$, נסמנו v_i. אזי $C_i(A^{-1}) = v_i$ לכל i .

ד. אם $A = B + C$ כך ש-B משולשית עליונה והפיכה ו-C משולשית תחתונה והפיכה

אז A הפיכה.

(מטריצה משולשית עליונה היא מטריצה ריבועית בה כל האיברים מתחת לאלכסון שווים ל-0

כלומר: אם $j < i$ אז $a_{i,j} = 0$.

מטריצה משולשית תחתונה היא מטריצה ריבועית בה כל האיברים מעל לאלכסון שווים ל-0)

לא נכון. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

ה. אם A הפיכה ויש B הפיכה כך ש- $AB = BA$ אז $AB = I$.

לא נכון. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. תהי $A \in F^{n\times n}$.

נסמן: $V = \mathrm{span}\{R_1(A), \dots, R_n(A)\}$, $W = \{x \in F^n | Ax = 0\}$.

א. הוכח: W מרחב וקטורי.

ב. הוכח/הפרך: $V \cap W = \{0\}$

I. כאשר $F = \mathbb{R}$.

II. כאשר $F = \mathbb{C}$.

רמז: אם $x \in V$ אז יש $b \epsilon F^n$ כך ש- $b^tA = x^t$ (חשבו מדוע..). מה יקרה אם נכפול

את המשוואה ב-x?

פתרון:

א. מספיק להוכיח כי W תת-מרחב של F^n. לפי הקריטריון המקוצר:

1. $0 \in W$ ולכן W לא ריקה.

2. יהיו $v, w \in W$ ו- $\alpha \in F$. צריך להוכיח: $\alpha v + w \in W$.

מפילוג ותכונות כפל מטריצה בסקלר $A(\alpha v + w) = A\alpha v + Aw = \alpha Av + Aw$.

כעת, $\alpha v + w \in W \Leftarrow A(\alpha v + w) = 0 \Leftarrow Av = 0, Aw = 0 \Leftarrow v, w \in W$.

ב. $x \in V$ ← יש $b \epsilon F^n$ כך ש- $b^t A = x^t$

$x \in W$ ← $Ax = 0$

לכן: $0 = b^t(Ax) = (b^t A)x = x^t x = x_1^2 + \cdots + x_n^2$

כאשר $F = \mathbb{R}$: $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$ ← $x_i = 0$ לכל i ← $x = 0$ ולכן הטענה נכונה.

כאשר $F = \mathbb{C}$: $(1 \quad i)\binom{1}{i} = 0$ ולכן הטענה אינה נכונה.

3. יהי V מרחב וקטורי, ותהיינה A, B תתי קבוצות סופיות של V.

א. הוכח: $span(A \cap B) \subseteq span(A) \cap span(B)$.

ב. הוכח: $span(A) \cup span(B)$ תת-מרחב וקטורי של V $\Leftrightarrow$

$span(A) \subseteq span(B)$ או $span(B) \subseteq span(A)$.

פתרון:

א. יהי $v \in span(A \cap B)$. אזי יש $v_1, \dots v_n \in A \cap B$ ו- $\alpha_1, \dots \alpha_n \in F$

כך ש: $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. כיוון ש- $A \cap B \subseteq A, B$ אז $v_1, \dots v_n \in A, B$.

לכן: $v \in span(A) \cap span(B) \Leftarrow v \in span(A), span(B)$.

ב. נסמן: $V = span(A), W = span(B)$.

$\Leftarrow$ נניח בשלילה כי $v \in V \setminus W, w \in W \setminus V$.

אם $V \cup W$ תת-מרחב אז $v + w = x \in V \cup W$. לכן $x \in V$ או $x \in W$

נניח בלי הגבלת הכלליות כי $x \in V$. אזי מסגירות V גם $(-v) + x = w \in V$. סתירה.

$\Rightarrow$ נניח בלי הגבלת הכלליות כי $W \subseteq V$. אזי $V \cup W = V$ תת-מרחב.

4. נתון תת המרחב הוקטורי הבא של $\mathbb{R}^4$:

$$V = span\left\{\begin{pmatrix}5\\5\\5\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

מצא מערכת משוואות לינארית (ניתן לייצגה גם ע"י מטריצה) שאוסף הפתרונות שלה הוא בדיוק V.

פתרון:

אנו רוצים לבדוק האם וקטור כללי $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \in V$. זה קורה אם ורק אם למערכת המיוצגת ע"י

$\left(\begin{array}{ccc|c}5&0&1&a\\5&2&-2&b\\5&0&1&c\\5&2&-2&d\end{array}\right)$ יש פתרון. נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}5&0&1&a\\5&2&-2&b\\5&0&1&c\\5&2&-2&d\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}5&0&1&a\\5&2&-2&b\\0&0&0&c-a\\0&0&0&d-b\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}5&0&1&a\\0&2&-3&b-a\\0&0&0&c-a\\0&0&0&d-b\end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון אם ורק אם $c-a=0, d-b=0$. לכן התשובה היא:

$$V = \left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{cases}a-c=0\\b-d=0\end{cases}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix} x = 0\right\}$$

5. האם הקבוצה $\{1+x^2+2x^3, 5+x+6x^2+13x^3, -3-x-3x^2-8x^3\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$

תלויה לינארית? אם כן, מצא צירוף לינארי לא טריוויאלי שנותן 0, אחרת, הראה שהצירוף הלינארי היחיד שנותן 0 הוא הטריוויאלי.

6. יהיו $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ בת"ל. הוכח כי הקבוצות הבאות בת"ל:

א. $\{v_1+v_3, v_2, v_3, v_4\}$.

ב. $\{v_1, \alpha v_2, v_3, v_4\}$ כאשר $\alpha \neq 0$ סקלר.

ג. $\{v_1, v_2, v_3+\alpha v_4, v_4\}$ כאשר α סקלר כלשהו.

פתרון :

א. בדומה לסעיף ג. ע"י בחירת $\alpha = 1$.

ב. אם $\gamma_1 v_1 + \gamma_2(\alpha v_2) + \gamma_3 v_3 + \gamma_4 v_4 = 0$ אז מאסוציאטיביות כפל בסקלר

$\gamma_1 v_1 + \gamma_2 \alpha(v_2) + \gamma_3 v_3 + \gamma_4 v_4 = 0$ וכיוון ש- v_1, v_2, v_3, v_4 בת"ל :

$\gamma_1, \gamma_2 \alpha, \gamma_3, \gamma_4 = 0$ אבל $\alpha \neq 0$ ולכן $\gamma_2 \alpha = 0 \Rightarrow \gamma_2 = 0$ כדרוש.

ג. אם $\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \gamma_3 (v_3 + \alpha v_4) + \gamma_4 v_4 = 0$ אז מאסוציאטיביות ומפילוג

$\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3 + (\gamma_3 \alpha + \gamma_4) v_4 = 0$ וכיוון ש- v_1, v_2, v_3, v_4 בת"ל :

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_3 \alpha + \gamma_4 = 0$ אבל $\gamma_3 = 0$ ולכן $\gamma_3 \alpha + \gamma_4 = 0 \Rightarrow \gamma_4 = 0$ כדרוש.

7. נתבונן ב- $\mathrm{B} = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$

האם $\begin{pmatrix} 5 & 39 \\ 18 & 23 \end{pmatrix} \in span(B)$? אם כן, מצא את הצירוף הלינארית המתאים.