תרגיל בית 5 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1 (חימום). תהי קבוצה $A = \{a, b\}$. הוכיחו שיש שתי פעולות שונות של $\mathbb{Z}_2$ על A.

שאלה 2. הוכיחו שלכל $n, s > 1$ טבעיים מתקיים כי $n | \varphi(s^n - 1)$.
רמז: המספר $\varphi(s^n - 1)$ הוא סדר של חבורה מוכרת.

שאלה 3 (קצת חזרה). תהי G חבורה מסדר p^n עבור n טבעי ו-p ראשוני, הפועלת על קבוצה X. נניח כי גודל הקבוצה $|X|$ זר ל-p. הוכיחו שקיימת ב-X נקודת שבת.

שאלה 4. קבעו האם הפעולות הבאות של חבורה G על $\mathbb{R}^2$ היא פעולה של חבורה על קבוצה. באם כן, תארו את המסלול של $(0, 1)$ ושל $(1, 1)$.

א. $G = \mathbb{R}$ עם פעולה המוגדרת לפי $t * (x, y) = (x + t, y + 2t)$.

ב. $G = \mathbb{Z}$ עם פעולה המוגדרת לפי $t * (x, y) = (tx, t^2 x)$.

ג. $G = SO_2(\mathbb{R})$, החבורה של כל מטריצות הסיבוב

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

עם פעולה המוגדרת לפי $A * (x, y) = A\binom{x}{y}$ לכל $A \in G$. רמז: נורמה.

שאלה 5. תהי G חבורה סופית מסדר אי זוגי. הוכיחו שלכל איבר $e \neq x \in G$ מתקיים $x^{-1} \notin \mathrm{conj}(x)$ (כלומר ההופכי של x לא שייך למחלקת הצמידות של x).

שאלה 6. תהי S_n חבורת התמורות על הקבוצה $\{1, \ldots, n\}$. הוכיחו או הפריכו האם הפונקציות הבאות הן פעולה של S_n על הקבוצה $\mathbb{R}^n$:

א. תהי תמורה $\sigma \in S_n$, ויהי איבר $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. הפעולה של σ על v מוגדרת כתמורה על האינדקסים, כלומר $\sigma * v = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$.

ב. תהי תמורה $\sigma \in S_n$, ויהי איבר $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. הפעולה של σ על v מוגדרת כתמורה של σ^{-1} על האינדקסים, כלומר $\sigma * v = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)})$.

שאלה 7 (קשה). נגדיר דגל מלא של $V = \mathbb{R}^n$ להיות שרשרת של מרחבים וקטוריים

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$$

כאשר $\dim V_i = i$. נסמן ב-$\mathcal{B}$ את אוסף הדגלים המלאים של V.

א. הוכיחו כי החבורה $GL_n(\mathbb{R})$ פועלת על $\mathcal{B}$ לפי

$$A * (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n) = A \cdot V_0 \subset A \cdot V_1 \subset \cdots \subset A \cdot V_n$$

כאשר $A \cdot V_i = \{Av \,|\, v \in V_i\}$.

ב. הראו שבפעולה לעיל יש מסלול אחד.

ג. מצאו את המייצב של הדגל הסטנדרטי $\{0\} \subset \langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \cdots \subset \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ כאשר $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ הוא הבסיס הסטנדרטי. רמז: אינדוקציה על i.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה שלחו לנו את הפתרון שלהן.

שאלה 8. נתבונן בחבורה $G = GL_2(\mathbb{Z})$, שהיא אוסף כל המטריצות בגודל 2×2 מעל השלמים שהדטרמיננטה שלהן היא 1 או -1. החבורה G פועלת על הקבוצה של "וקטורי עמודה" ב-$\mathbb{Z}^2$ לפי כפל

$$A * \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

אפיינו את המסלולים של פעולה זו והוכיחו שניתן לבחור נציג מן הצורה $\binom{d}{0}$ עבור $d \geq 0$. מצאו את המייצב של $\binom{d}{0}$ תחת הפעולה.

בהצלחה!