מתמטיקה מד"ר תשפא מועד א

1. מצאו פתרון למד"ר $y'+y=x$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(0)=0$.

פתרון: זוהי מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $y'+a(x)y=b(x)$ עבור $a(x)=1, b(x)=x$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C+\int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x)$ קדומה של $a(x)$. נבחר $A(x)=x$ ונציב:

$$y=e^{-x}\left(C+\int xe^{x}\mathrm{dx}\right)=e^{-x}C+e^{-x}\int xe^{x}\mathrm{dx}.$$

נחשב $\int xe^x\mathrm{dx}$ בעזרת אינטגרציה בחלקים

$$\int xe^{x}\mathrm{dx}=\left\{\begin{array}{ccc} f=x & \Rightarrow & f'=1 \\ g'=e^{x} & & g=e^{x}\end{array}\right\}=xe^{x}-\int e^{x}\mathrm{dx}=e^{x}\left(x-1\right)$$

ולכן

$$y=e^{-x}C-e^{-x}\int xe^{x}\mathrm{dx}=e^{-x}C+(x-1)$$

ונציב תנאי התחלה $y(0)=0$ למצוא את הקבוע C.

$$0=y(0)=C-1$$

לכן $C=1$ והפתרון הוא

$$y(x)=e^{-x}+x-1.$$

2. מצאו פתרון למד"ר $xy'=x^2e^{-y}+\frac{x+1}{e^y}$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1)=0$.

פתרון: נסדר:

$$xy' = x^2e^{-y} + \frac{x+1}{e^y}$$

$$xy' = \frac{x^2}{e^y} + \frac{x+1}{e^y} = \frac{x^2+x+1}{e^y}$$

$$e^y y' = x + 1 + \frac{1}{x}$$

$$e^y \mathrm{dy} = \left(x+1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{dx}$$

וקיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו:

$$e^y = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| + C$$

לכן

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + x + \ln|x| + C\right).$$

נציב תנאי התחלה

$$0 = y(1) = \ln\left(\frac{1}{2} + 1 + 0 + C\right)$$

לכן $\frac{1}{2}+1+C=1$ ו $C=-\frac{1}{2}$ והתשובה הסופית היא

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + x + \ln|x| - \frac{1}{2}\right).$$

3. מצאו פתרון למד"ר $xy' = y + \frac{y}{\ln(y)-\ln(x)}$ המקיים $y(1) = \frac{1}{e^2}$.

פתרון: נסדר

$$xy' = y + \frac{y}{\ln(y) - \ln(x)}$$

$$xy' = y + \frac{y}{\ln\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{\frac{y}{x}}{\ln\left(\frac{y}{x}\right)}$$

וקיבלנו שהמד"ר שלנו הומוגנית. כלומר מהצורה $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ כאשר $g(z) = z + \frac{z}{\ln(z)}$. נציב $z = \frac{y}{x}$ ונמצא את z מתוך $\int \frac{1}{g(z)-z}\mathrm{dz} = \ln|x| + C$. נחשב את האינטגל משמאל:

$$\int \frac{1}{g(z) - z}\mathrm{dz} = \int \frac{1}{\frac{z}{\ln(z)}}\mathrm{dz} = \int \frac{\ln(z)}{z}\mathrm{dz} = \left\{ \begin{array}{c} t = \ln(z) \\ \mathrm{dt} = \frac{1}{z}\mathrm{dz} \end{array} \right\} = \int t\mathrm{dt} =$$

$$= \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}\ln^2(z)$$

וביחד $\frac{1}{2}\ln^2(z) = \ln|x| + C$. נבודד את z

$$\ln(z) = \pm\sqrt{2\ln|x| + C}$$

$$z = e^{\pm\sqrt{2\ln|x|+C}}$$

ונחזור ל y. מתקיים

$$y = xz = xe^{\pm\sqrt{2\ln|x|+C}}$$

ונמצא את הקבוע על ידי תנאי ההתחלה.

$$\frac{1}{e^2} = y(1) = e^{\pm\sqrt{C}}$$

$$-2 = \pm\sqrt{C}$$

ולכן צריך לקחת את הפתרון עם המינוס ובנוסף $C = 4$. סה"כ הפתרון הוא

$$y = xe^{-\sqrt{2\ln|x|+4}}.$$

4. מצאו פתרון למד"ר $xy' - (x-1)\,y'' = y$ המקיים $y(0) = 1$ וכן $y'(0) = 0$.

פתרון: נסמן פתרון y כטור טיילור

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

ואז

$$y'=\sum_{k=1}^{\infty}a_kkx^{k-1},\qquad y''=\sum_{k=2}^{\infty}a_kk\left(k-1\right)x^{k-2}$$

כעת נציב:

$$\left(1-x\right)y''+xy'-y=y''-xy''+xy'-y=$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}a_kk\left(k-1\right)x^{k-2}-\sum_{k=2}^{\infty}a_kk\left(k-1\right)x^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}a_kkx^k-\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+2}\left(k+2\right)\left(k+1\right)x^k-\sum_{k=1}^{\infty}a_{k+1}\left(k+1\right)kx^k+\sum_{k=1}^{\infty}a_kkx^k-\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=$$

$$=a_2\cdot2\cdot1-a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_{k+2}\left(k+2\right)\left(k+1\right)-a_{k+1}\left(k+1\right)k+a_kk-a_k\right]x^k$$

ולכן $2a_2-a_0=0$ ולכל $k\geq1$ מתקיים

$$a_{k+2}\left(k+2\right)\left(k+1\right)-a_{k+1}\left(k+1\right)k+a_kk-a_k=0$$

$$a_{k+2}=\frac{\left(1-k\right)a_k+k\left(k+1\right)a_{k+1}}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}$$

נוכל לבחור a_0,a_1 כרצוננו ואז:

$$a_2=\frac{a_0}{2}$$

$$a_3=\frac{2a_2}{3!}=\frac{a_0}{3!}$$

$$a_4=\frac{-a_2+3!a_3}{3\cdot4}=\frac{-\frac{a_0}{2}+3!\frac{a_0}{3!}}{3\cdot4}=\frac{a_0}{4!}$$

ואפשר להוכיח באינדוקציה כי $a_k = \frac{a_0}{k!}$ לכל $k \geq 2$.

כעת נבחר $a_1 = \frac{a_0}{1!}$ ונקבל כי

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 \frac{1}{k!} x^k = a_0 e^x$$

ונבחר $a_0 = 1$ לקבל כי $y_1(x) = e^x$ פתרון למד"ר שלנו. נייצר פתרון נוסף: נבחר $a_0 = 0$ (מה שגורר כי $a_k = 0$ לכל $k \geq 2$) ו $a_1 = 1$ ונקבל את הפתרון $y_2(x) = x$. נוכיח כי y_1, y_2 בת"ל ע"י שנראה שהורונסקיאן שונה מאפס. אכן

$$\det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^x & x \\ e^x & 1 \end{pmatrix} = e^x (1 - x)$$

שונה מאפס בסביבה של 0 (ששמה תנאי ההתחלה). מכאן נסיק שהפתרון הכללי הוא

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 x$$

ונציב תנאי התחלה

$$1 = y(0) = c_1$$

$$0 = y'(0) = c_1 + c_2$$

לכן $c_1 = 1, c_2 = -1$ והפתרון לתרגיל הוא $y(x) = e^x - x$.

5. מצאו פתרון למד"ר $x^2 y'' - xy' + y = x$ המקיים $y(1) = 1$ וכן $y'(1) = -1$.

פתרון: נתחיל עם המד"ר ההומגנית

$$x^2 y'' - xy' + y = 0$$

שהיא משוואת אוילר. נציב $y = x^r$ ונקבל

$$x^2 r (r-1) x^{r-2} - x r x^{r-1} + x^r = 0$$

$$r (r-1) x^r - r x^r + x^r = 0$$

ונצמצם את x^r. נקבל

$$r\left(r-1\right)-r+1=0$$

$$\left(r-1\right)\left(r-1\right)=0$$

שהשורש שלה הוא $r=1$ מריבוי 2. לכן $x,x\ln(x)$ הם פתרונות למד"ר ההומגנית. הם בת"ל בגלל ש

$$\det\begin{pmatrix} x & x\ln(x)\\ 1 & \ln(x)+1 \end{pmatrix}=x\left(\ln(x)+1\right)-x\ln(x)=x$$

שונה מאפס באיזור 1 (ששמה תנאי ההתחלה). לכן הפתרון הכללי להומגנית הוא

$$y_h=d_1x+d_2x\ln(x)$$

ונמצא פתרון פרטי y_p למד"ר הלא הומגנית בעזרת וריאצית המקדמים. נסמן

$$y_p(x)=c_1(x)\cdot x+c_2(x)\cdot x\ln(x)$$

כאשר c_i נמצא בעזרת c_i'. נציג את המד"ר בצורה

$$y''-\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x^2}y=\frac{1}{x}$$

בשביל לגלות ש $f(x)=\frac{1}{x}$. חשבנו כבר ש $\det\begin{pmatrix} x & x\ln(x)\\ 1 & \ln(x)+1 \end{pmatrix}=x$ ולכן

$$c_1'(x)=\frac{\begin{pmatrix} 0 & x\ln(x)\\ \frac{1}{x} & \ln(x)+1 \end{pmatrix}}{x}=\frac{-\ln(x)}{x}=-\frac{\ln(x)}{x}$$

$$c_2'(x)=\frac{\det\begin{pmatrix} x & 0\\ 1 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}}{x}=\frac{1}{x}$$

לכן $c_1(x)=-\frac{1}{2}\ln^2(x)$ (חישבנו בשאלה 3) ו $c_2(x)=\ln x$ (אנחנו מסתכלים באיזור 1 לכן $x=|x|$). לכן

$$y_p(x)=-\frac{1}{2}\ln^2(x)\cdot x+\ln(x)\cdot x\ln(x)=\frac{1}{2}x\ln^2(x)$$

והפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית בתרגיל הוא

$$y = y_p + y_h = \frac{1}{2}x\ln^2(x) + d_1x + d_2x\ln(x)$$

ונציב תנאי התחלה למצוא את הקבועים d_i. מהתנאי הראשון נקבל

$$1 = y(1) = d_1$$

ונגזור

$$y' = \frac{1}{2}\left[\ln^2(x) + 2x\frac{\ln(x)}{x}\right] + d_1 + d_2\left(\ln(x) + 1\right)$$

ונציב

$$-1 = y'(1) = d_1 + d_2$$

לכן $d_2 = -1 - d_1 = -1 - 1 = -2$. סה"כ הפתרון הוא לתרגיל הוא

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x\ln^2(x) + d_1x + d_2x\ln(x) \\ &= \frac{1}{2}x\ln^2(x) + x - 2x\ln(x) \end{aligned}$$