# תרגול אנליזה מודרנית 7

1. (generalized DCT) נניח כי $f_n, g_n, f$ ו $g$ הינן אינטגרביליות, $f_n \to f$ כב"מ, $g_n \to g$ כב"מ, $|f_n| \le g_n$ לכל $n$ וגם $\int g_n \to \int g$ . הוכיחו כי $\int f_n \to \int f$ .

פתרון: נגדיר סדרה חדשה של פונקציות חיוביות - $h_n = g_n - f_n$ . עפ"י למת פאטו נקבל

$$\underline{\lim}\int h_n = \underline{\lim}\int g_n - f_n = \underline{\lim}\int g_n + \underline{\lim}\int -f_n$$
$$\ge \int \underline{\lim} h_n = \int \underline{\lim}(g_n - f_n) = \int g - f$$
$$\Leftrightarrow \overline{\lim}\int f_n \le \int f$$

מצד שני , נגדיר $h_n = g_n + f_n$ עפי למת פאטו נובע כי

$$\underline{\lim}\int h_n = \underline{\lim}\int f_n + g_n = \underline{\lim}\int f_n + \int g$$
$$\ge \int \underline{\lim} h_n = \int \underline{\lim}(f_n + g_n) = \int f + \int g.$$
$$\Leftrightarrow \underline{\lim}\int f_n \ge \int f$$

מכאן שבסך הכל $\underline{\lim}\int f_n \ge \int f \ge \overline{\lim}\int f_n$ ולכן $\int f_n \to \int f$ .

2. יהיו $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות כך ש $f_n \to f$ כב"מ. הוכיחו כי $\int |f - f_n| \to 0 \Leftrightarrow \int |f_n| \to \int |f|$ .

פתרון:

$\Leftarrow$: נניח כי $\lim \int |f - f_n| = 0$ .

אזי

$$\int_X |f_n - f| du \ge \int_X \big||f_n| - |f|\big| du \ge \left|\int_X |f_n| - |f| du\right| = \left|\int_X |f_n| du - \int_X |f| du\right|$$

ומכאן ש

$$0 = \lim_{n\to\infty}\int_X |f_n - f| du \ge \lim_{n\to\infty}\left|\int_X |f_n| du - \int_X |f| du\right| = 0$$

$\Leftarrow$: נניח כי $\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n|du = \int_X |f|du$.

נשים לב כי $g_n = |f| + |f_n| \geq |f - f_n|$. ברור כי $g_n$ אינטגרבילית וכי $g_n \to g = 2f$ כב"מ וכי $\int g_n \to \int g$ מכך ש $\int |f_n| \to \int |f|$. כעת ברור כי מתקיימים כל התנאים למשפט הכללי של ההתכנסות הנשלטת ולכן נובע כי

$\lim \int |f - f_n| = \int \lim |f - f_n| = 0$ . מש"ל.

***פונקציית קנטור***

__תזכורת:__ קבוצת קנטור $C$ מוגדרת ע"י חיתוך הקבוצות $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ , וכפי שראינו בתרגול ניתן לרשום גם

$$C = \{x = 0.x_1x_2x_3\ldots_3 : \forall i \ x_i \in \{0,2\}\}$$

נגדיר פונקציה $f : [0,1] \to [0,1]$ באופן הבא :

ראשית, נגדיר את הפונקציה על קבוצת קנטור. לכל $x = 0.x_1x_2x_3\ldots \in C$ נחלק את הספרות הטרינאריות שלו ב-2 ונפרש את התוצאה כמספר בינארי. במילים אחרות התהליך הוא כנ"ל:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n/2}{2^n} = f(x)$$

ואם $x \notin C$ , אזי $x$ נמצא באחד מהקטעים הפתוחים $\left(\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right)$ שהסרנו בבניית קבוצת קנטור. (כמו למשל $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right),\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ ) במקרה זה ניתן ל- $x$ את הערך של פונקציית קנטור בקצות הקטע הזה , שבוודאי נמצאים בקבוצת קנטור (אין חשיבות לבחירת הקצה, שכן ערך הפונקציה זהה בשניהם).

לפונקציה $f$ קוראים פונקציית קנטור, ויש לה תכונות ייחודיות ההופכות אותה לדוגמה נגדית חשובה.

__דוגמאות:__

$0 = 0.000\ldots_3 \in C$ **ולכן** $f(x) = 0.000\ldots_2 = 0$

$1 = 0.222\ldots_3 \in C$ **ולכן** $f(1) = 0.111\ldots_2 = 1$

$\frac{1}{3} = 0.1_3 = 0.0222\ldots_3 \in C$ **ולכן** $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0.0111\ldots_2 = \frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}=0.2_3\in C$ ולכן $f\left(\frac{2}{3}\right)=0.1_2=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}=0.111\ldots_3\notin C$ הוסר יחד עם הקטע $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ ולכן $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}$ .

נוכיח מספר תכונות:

א. תמונת קבוצת קנטור תחת פונקציית קנטור היא כל הקטע $[0,1]$

ב. פונקציית קנטור היא מונוטונית עולה חלש בקטע $[0,1]$

ג. פונקציית קנטור היא רציפה.

ד. פונקציית קנטור גזירה כב"מ בקטע $[0,1]$ עם נגזרת 0 (לפי מידת לבג $m$)

**<u>הוכחה:</u>**

א. יש להראות $f[C]=[0,1]$ . נראה הכלה דו-כיוונית.

$\subseteq$ : יהי $a\in f[C]$ . קיים $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}\in C$ עבורו $a=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n/2}{2^n}$ . הספרות $\{x_n\}$ כזכור הן 0 או 2, ולכן:

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0/2}{2^n}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n/2}{2^n}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

ולכן $a=f(x)\in[0,1]$

$\supseteq$ : יהי $a\in[0,1]$ אזי יש לו פיתוח בינארי $a=0.a_1a_2a_3\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$ שבו כל הספרות הן 0 או 1. נכפיל את הספרות פי 2 ונפרש את התוצאה כמספר טרינארי $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_n}{3^n}$ . זהו מספר בקבוצת קנטור ומתקיים $f(x)=a$ ולכן $a\in f[C]$ .

ב. יש להראות כי אם $x,y\in[0,1]$ מקיימים $x<y$ אזי $f(x)\le f(y)$ .

נוכיח תחילה את המקרה שבו $x,y\in C$ : ובכן $x<y$ ולכן יהי $N$ מיקום הספרה הטרינארית הראשונה שבה $x$ ו- $y$ לא מתלכדים. (כלומר $x_N=0<2=y_N$ , ולכל $n<N$ , $x_n=y_n$ ). אם כך

$$f(y)-f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n/2-x_n/2}{2^n}=\sum_{n=1}^{N-1}0+\frac{y_N/2-x_N/2}{2^N}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{y_n/2-x_n/2}{2^n}=$$

$$=\frac{1}{2^N}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{y_n/2-x_n/2}{2^n}\ge\frac{1}{2^N}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{0-1}{2^n}=\frac{1}{2^N}-\frac{1}{2^N}=0$$

ובמקרה שבו $x<y\in[0,1]$ כלשהם נמצא מספרים $x',y'\in C$ המקיימים $x'\le x$ ו- $y'\ge y$ וגם $f(x')=f(x)$ ו- $f(y')=f(y)$. וע"פ המקרה הקודם $f(x')\le f(y')$ ולכן גם $f(x)\le f(y)$ וסיימנו.

ג. $f$ מונוטונית עולה, וידוע מאינפי' שנקודות אי הרציפות של פונקציות מונוטוניות הן מסוג קפיצה בלבד. אבל קפיצה לא תתכן כי אז לא יתקיים $f[C]=[0,1]$.

ד. נוכיח ש- $f'(x)=0$ לכל $x\in C^c=[0,1]\setminus C$. ובכן יהי $x\in[0,1]\setminus C$ אזי $x$ נמצא באחד הקטעים הפתוחים $\left(\frac{k}{3^n},\frac{k+1}{3^n}\right)$, שהסרנו בבניית קבוצת קנטור, ושם $f$ קבועה. אם ניקח $h$ קטן דיו, יתקיים $f(x+h)=f(x)$ ולכן $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\xrightarrow{h\to0}0=f'(x)$.

הקבוצה שבה לא הראינו גזירות היא קבוצת קנטור, שמידתה (לבג) אפס ולכן כב"מ.