

תרגיל בית 2 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה
הגשה ב-16.08 בשיעור התרגיל

1. חוקר א' בדק את ריכוז האבץ הממוצע במימי אגם. ריכוז האבץ (בגרם לליטר) נמדד במדגם שכלל 16 דגימות מים והתקבלו הנתונים: $\sum_{i=1}^{16} x_i^2 = 108.265$ $\sum_{i=1}^{16} x_i = 41.6$. ממדידות העבר, ידוע לחוקר א' שסטיית התקן של מדגמי אבץ באגם זה היא 0.3 גרם לליטר. מניחים שריכוז האבץ מתפלג נורמלית.
- א. מצא רווח סמך, ברמת מובהקות 1%, לתוחלת רמת האבץ באותו אגם יקבל החוקר א'.
- ב. חוקר א' מבקש לדעת מה גודל המדגם הנדרש, על מנת שברמת בטחון 95%, הסטייה באמידת התוחלת לא תעלה על 0.05?
- ג. חוקר ב' איננו יודע את הנתון אודות סטיית התקן של ריכוז האבץ באגם. גם הוא מבקש לחשב רווח סמך לתוחלת רמת האבץ, ברמת מובהקות 1%, ולהשתמש בנתוני הדגימות של חוקר א'. מה יהיה רווח הסמך שיקבל?
- ד. אילו חוקר ב' היה מקבל שסטיית התקן המדגמית היא 0.3 גרם לליטר. האם רווח הסמך שיחשב יהיה גדול או קטן מרווח הסמך של חוקר א' שחושב בסעיף א'? בהנחה ששאר הנתונים לא השתנו. הסבר בקצרה (עד 5 שורות). אין צורך לחשב את רווח הסמך.
2. מטילים מטבע 1,000 פעמים. יצא "H" 543 פעמים. רוצים לבדוק את הטענה שהמטבע מוטא לטובת "H", ברמת בטחון 99.5%. בצע את הבדיקה והסק המסקנות (נסח במפורש את השערות המבחן).
3. חוקר ערך ניסוי ובדק את גובהם הממוצע של 16 ילדים. הוא סיכם את כל הגבהים וקיבל 22.79 מ'. ידוע שסטיית התקן באוכלוסייה היא 0.1 מ' ושהאוכלוסייה מתפלגת נורמלית. אם החוקר קיבל את רווח הסמך הבא: $1.3724 \leq \mu \leq 1.4765$, מהי רמת הביטחון שבה חושב רווח הסמך?
4. במפעל העובד ב-3 משמרות (יום, ערב, לילה) נבדקו כל המוצרים שיוצרו במשך שבוע. להלן מספר המוצרים הפגומים והתקינים בכל אחת מהמשמרות:
- | משמרת \ איכות המוצר | יום | ערב | לילה | סה"כ |
|---------------------|-----|-----|------|------|
| פגומים | 30 | 55 | 75 | 160 |
| תקינים | 70 | 35 | 35 | 140 |
| סה"כ | 100 | 90 | 110 | 300 |
- בדוק ברמת מובהקות של 2.5% האם קיים קשר באיכות המוצרים ובין המשמרות השונות בה יוצרו?

5. הזמן הדרוש לביצוע ניתוח מסוים מתפלג נורמלית עם תוחלת של 8 שעות וסטיית תקן של 4 שעות. רופא מציע שיטת ניתוח חדשה לקיצור התהליך. השיטה נבדקת על מדגם של 36 מנותחים, והתקבל ממוצע של $\bar{X} = 6.8$ שעות.
- א. בדוק את ההשערה ששיטת הניתוח המוצעת אמנם מקצרת את זמן הניתוח, ברמת מובהקות 0.01. (נסח את ההשערות והסק המסקנה).
- ב. חשב את ערך P-value. בעזרתו שיטת הניתוח המוצעת אמנם מקצרת את זמן הניתוח, ברמת מובהקות 0.05.
6. במפעל שתי מכונות: A ו-B. 10% מתוצרת המפעל מיוצרת במכונה A ו-90% במכונה B. ידוע ש-1% מהמוצרים המיוצרים במכונה A ו-5% מהמוצרים המיוצרים במכונה B הם פגומים.
- א. נבחר מוצר אקראי, מה ההסתברות שהוא פגום?
- ב. נמצא מוצר שהוא פגום, מה ההסתברות שיוצר במכונה A?
- ג. אחרי ביקור של טכנאי שמטפל במכונה B, מוצאים ש-1.9% ממוצרי המפעל הם פגומים. מה כעת ההסתברות שמוצר המיוצר במכונה B יהיה פגום?
7. מטילים שתי קוביות בזו אחר זו ומתייחסים למאורעות הבאים:
 $A = \{\text{בקובייה הראשונה התקבל "1" או "2" או "3"}\}$
 $B = \{\text{בקובייה השנייה התקבל "4" או "5" או "6"}\}$
 $C = \{\text{סכום שתי ההטלות הוא 7}\}$
האם המאורעות A, B, C הם בלתי תלויים? הראה זאת.
8. מטילים שלוש פעמים מטבע הוגן שעל צד אחד שלו "1", ועל צד שני "2". נסמן את סכום תוצאות ההטלות ב-k. כעת מטילים מטבע הוגן אחר, שעל צד אחד שלו "H" ועל הצד שני "T", k פעמים. מה ההסתברות שלא יצא "H" כלל בהטלות?
9. תצפיתן לאיתור מסתננים משקיף על עמק. לוקח בדיוק n שעות לחצות את העמק. לפני תום כל שעה עגולה התצפיתן עורך תצפית לגלות מסתננים. ההסתברות שיאתר מסתנן היא p_0 אם המסתנן לובש בגד הסוואה ו- p_1 אם אינו לובש בגד הסוואה. ההסתברות שמסתנן ילבש בגד הסוואה היא b. מסתנן מתחיל לחצות את העמק בדיוק בתחילת שעה מסוימת. חשב את ההסתברות שהתצפיתן יבחין במסתנן לפחות פעם אחת במהלך תצפיותו.
10. צוות של אח ואחות משתתף בחידון בו מוצגת בכל סיבוב שאלה על מסך. התשובות האפשריות לכל שאלה הן "נכון" או "לא נכון" בלבד. מאחר ולאח ולאחות אותה רמת ידע, כל אחד מהם יודע לענות תשובה נכונה לשאלה בהסתברות קבועה a ($0 \leq a \leq 1$) באופן בלתי תלוי האחד באחר. (כמובן שהם אינם יודעים אם ענו נכון על השאלה, אלא רק לאחר שהצביעו). כללי החידון למתן תשובה הם כדלקמן: לאחר שהשאלה הופיעה על המסך, שני חברי הצוות דנים בה. אם הם מסכימים על התשובה, ישיבו את התשובה המוסכמת. אם הם חלוקים בדעותיהם, הם מטילים מטבע הוגן כדי לבחור את התשובה שישבו. א. מה ההסתברות שענו תשובה נכונה לשאלה המוצגת על המסך? ב. בהינתן שהזוג לא הטיל מטבע לאחר הדיון המשותף, מה ההסתברות שענו תשובה נכונה לשאלה המוצגת על המסך?