# פתרון מועד ב' אינפי 1 מדמ"ח תשפ"א

## שאלה 1:

הוכיחו שלכל $x > 0$ מתקיים:

$$\frac{\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\ln(x+1)} > \frac{x+1}{2x^2+2x+1}$$

## פתרון:

נתבונן בפונקציות $f(t) = \arctan\frac{t}{t+1}, g(t) = \ln(t+1)$. אחרי שהתבוננו, נשים לב שהן גזירות בקטע $(0,x)$, רציפות בקטע $[0,x]$ ובנוסף: $g'(t) = \frac{1}{1+t} \neq 0$ לכל $t$ בקטע. לכן, אפשר להשתמש במשפט הערך הממוצע של קושי - קיימת נקודה $c \in (0,x)$ עבורה:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \frac{\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\ln(x+1)}$$

כעת, $f'(t) = \frac{1}{1+\left(\frac{t}{t+1}\right)^2} \cdot \left(\frac{t}{t+1}\right)' = \frac{1}{1+\frac{t^2}{(t+1)^2}} \cdot \frac{t+1-t}{(t+1)^2} = \frac{1}{(t+1)^2+t^2}$ כלומר: $f'(t) = \frac{1}{2t^2+2t+1}$, ולכן אפשר לרשום את המסקנה ממשפט קושי באופן

הבא:

$$\frac{\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\ln\left(x+1\right)}=\frac{\frac{1}{2c^{2}+2c+1}}{\frac{1}{c+1}}=\frac{c+1}{2c^{2}+2c+1}$$

אם כן, נקבל שנותר להוכיח ש:

$$\frac{c+1}{2c^{2}+2c+1}>\frac{x+1}{2x^{2}+2x+1}$$

מכיוון ש: $c<x$, מספיק להראות שהפונקציה: $h\left(t\right)=\frac{t+1}{2t^{2}+2t+1}$ יורדת.

לשם כך, נגזור:

$$h'\left(t\right)=\frac{2t^{2}+2t+1-\left(t+1\right)\left(4t+2\right)}{\left(2t^{2}+2t+1\right)^{2}}=\frac{-2t^{2}-4t-1}{\left(2t^{2}+2t+1\right)^{2}}$$

ובתחום $t>0$ הנגזרת שלילית והפונקציה אכן יורדת.

<u>שאלה 2:</u>

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

א. (14 נק') תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה, ונניח ש-$f$ רציפה בכל הממשיים. אזי, למשוואה $f\left(x\right)=x$ יש פתרון אם ורק אם למשוואה $f\left(f\left(x\right)\right)=x$ יש פתרון.

ב. (13 נק') תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה, ונניח ש-$f$ רציפה בכל הרציונליים. אזי, קיימת פונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הרציפה בכל הממשיים ומקיימת את התנאי:

$f(x) = g(x)$ לכל $x \in \mathbb{Q}$.

<u>פתרון:</u>

א. הטענה נכונה. בכיוון אחד, אם קיים פתרון $c$ למשוואה $f(x) = x$, כלומר $c = f(c)$, אז גם: $f(f(c)) = f(c) = c$ והוא פתרון של המשוואה $f(f(x)) = x$.

בכיוון השני, אם קיים $c$ עבורו $f(f(c)) = c$, נתבונן בפונקציה: $g(x) = f(x) - x$. מצד אחד: $g(c) = f(c) - c$, ומצד שני: $g(f(c)) = f(f(c)) - f(c) = c - f(c)$. אם $c - f(c) = 0$ הרי ש-$c$ פתרון של המשוואה $f(x) = x$, ואם לא אז מצאנו שתי נקודות – $c, f(c)$ – שבהן הסימנים של $g$ מנוגדים ולכן קיימת נקודה $d$ שבה: $g(d) = 0$, לפי ערך הביניים ($g$ רציפה כהפרש רציפות). אם כן: $f(d) - d = 0$, ו-$d$ פתרון של המשוואה.

ב. הטענה לא נכונה. נתבונן בפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}-x}$. $f$ רציפה בכל הרציונליים, אך כל $g$ ששווה ל-$f$ על הרציונליים לא תהיה רציפה ב-$\sqrt{2}$, כי אם ניקח סדרת רציונליים $x_n$ ששואפת ל-$\sqrt{2}$, נקבל שלסדרה: $g(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2}-x_n}$ אין גבול, ולכן הגבול של $g$ ב-$\sqrt{2}$ לא קיים (ולכן היא לא רציפה).

<u>שאלה 3:</u>

א. (14 נק') בדקו האם הטור הבא מתכנס: $\sum \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$. הוכיחו את תשובתכם.

ב. (13 נק') חשבו את הגבול: $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x^x} - 1\right)$. נמקו כל צעד.

<u>פתרון:</u>

א. נשים לב לעובדה הבאה:

$$\sqrt[n]{n}-1=n^{\frac{1}{n}}-1=e^{\ln n^{\frac{1}{n}}}-1=e^{\frac{\ln n}{n}}-1$$

ניעזר בגבול הידוע: $\frac{e^t-1}{t}\to 1$ כאשר $t\to 0$. לפי סדרי גודל, $\frac{\ln n}{n}\to 0$ כאשר $n\to\infty$ ולכן אפשר לומר ש:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}-1}{\frac{\ln n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\ln n}{n}}-1}{\frac{\ln n}{n}}=1$$

מכיוון ש: $\sqrt[n]{n}-1,\frac{\ln n}{n}>0$ לכל $n$, הטורים חיוביים ומבחן ההשוואה הגבולי אומר שהם מתכנסים או מתבדרים יחדיו. הטור $\sum\frac{\ln n}{n}$ מתבדר (השוואה עם $\sum\frac{1}{n}$ המתבדר, שהרי $\frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n}$ החל משלב מסוים) ולכן גם הטור שלנו מתבדר.

ב. ראשית, מהו הגבול של $x^x$ כאשר $x\to 0^+$?

$$\lim_{x\to 0^+}x^x=\lim_{x\to 0^+}e^{x\ln x}=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$$

את המעריך אפשר לחשב עם לופיטל: $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$, ולכן $x^x\to 1$.

אם כך, הגבול שלנו הוא גבול מהצורה $\frac{0}{0}$, ונוכל להשתמש בלופיטל:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{1}{x^x}-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-x\ln x}-1}{x}\overset{L}{=}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-e^{-x\ln x}\left(\ln x+1\right)}{1}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{1}{x^x}\left(\ln x+1\right)=\infty$$

כי $\ln x\to-\infty$, וראינו כבר ש: $x^x\to 1$.

<u>שאלה 4:</u>

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

א. (14 נק') תהי $a_n$ סדרה. נניח שלכל תת-סדרה קיימת תת-סדרה המתכנסת ל-$L$. אזי, $a_n\to L$.

ב. (13 נק') הסדרה $a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}$ מתכנסת.

<u>פתרון:</u>

א. הטענה נכונה. נניח בשלילה שלא, כלומר הסדרה לא מתכנסת ל-$L$. לכן, קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $n$ קיים $k_n>n$ עבורו: $|x_{k_n}-L|\geq\varepsilon$. מכיוון שזה נכון לכל $n$, יש אפשר לבחור סדרה של אינדקסים $n_1,n_2,\ldots$ כך ש: $k_{n_1}<k_{n_2}<\ldots$ עולה ממש ואז $\left\{x_{k_{n_j}}\right\}$ היא תת-סדרה שאין לה תת-סדרה שמתכנסת ל-$L$, וזו סתירה.

ב. הטענה נכונה. הסדרה חסומה מלמטה ע"י 0 מצד אחד, ומונוטונית יורדת מצד שני, מכיוון ש:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}-\frac{1}{n}<3\cdot\frac{1}{3n}-\frac{1}{n}=0$$

חסומה מלמטה ומונוטונית יורדת זו סדרה מתכנסת, חביבי.

**שאלות מיטיבות:**

5. חשבו את הגבול: $\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}+\sin\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$.
6. חשבו את סכום הטור: $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4}{(n+5)(n+6)}-\frac{2^{2n}}{3\cdot 7^n}\right)$.
7. חשבו את $f'(x)$, כאשר: $f(x)=x^{\arctan\left(x^{\arctan x}\right)}$.
8. קבעו עבור אלו ערכים של $a$ לפונקציה: $f(x)=ax^3+4ax^2+8x$ יש שתי נקודות קיצון מקומיות.

<u>פתרון:</u>

תשובה סופית תספיק.

5. $\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}+\sin\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=e^{\frac{1}{2}}$, עם קצת חוקי לוגריתם, נר לרבי מאיר וקורטוב לופיטל.
6. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4}{(n+5)(n+6)}-\frac{2^{2n}}{3\cdot 7^n}\right)=\frac{20}{63}$, לפחות לפי וולפרם.
7. משהו לא נעים:

$$x^{\arctan\left(x^{\arctan x}\right)}\left(\frac{\arctan\left(x^{\arctan x}\right)}{x}+\frac{\ln x\arctan x\left(\frac{\ln x}{x^2+1}+\frac{\arctan x}{x}\right)}{x^{2\arctan x}+1}\right)$$

8. טוב הנגזרת הראשונה היא: $f'(x)=3ax^2+8ax+8$, כדי שיהיו שתי נקודות קיצון זה צריך להתאפס פעמיים, כלומר: $64a^2-96a>0$, כלומר: $a\left(a-\frac{3}{2}\right)>0$ והפתרון הוא: $a<0\vee a>\frac{3}{2}$.