בוחן אלגברה לינארית למהנדסים תשעו

7/12/2015 כ"ה כסליו

מתרגלים: אחיה בר־און, ביאנה פרידמן, יונתן רוזן, תמר נחשוני.

- ענו על כל השאלות.
- **על כל דף תשובה רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא. על מחברת בחינה ממדור בחינות מספיק למלא רק בעמוד הראשון.**
- הקפידו על סדר ניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- ניקוד: שאלות חישוב 50 נק' + שאלות עם נימוק 60 נק' = 110 נקו' בסה"כ
- מבנה הבחינה:
  - חלק 1 שאלת חישוב עם 4 סעיפים.
  - חלק 2 שאלות עם נימוק: שאלות הוכח/הפרך + שאלת הוכחה.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

Part 1	Q1	
Part 2	Q1	
	Q2	
	Q3	
total		

בהצלחה!

חלק 1 - שאלות חישוביות

1. נגדיר את המטריצה $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$.

(א) (15 נק') עבור אילו ערכי a המטריצה הפיכה?

פתרון: נדרג

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & a & 1\\ 0 & 1-a & a-1\\ 0 & 1-a^2 & 1-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & a & 1\\ 0 & 1-a & a-1\\ 0 & 0 & (1-a)(a+2)\end{pmatrix}$$

אם $a\neq 1,-2$ נקבל ניתן להמשיך

$$\to\begin{pmatrix} 1 & * & *\\ 0 & 1 & *\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ואז המטריצה הפיכה.

אחרת, אם $a=1$ או $a=-2$ אזי נקבל שורת אפסים ואז המטריצה אינה הפיכה.

(ב) (15 נק') נגדיר $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. פרק את B לפירוק LU. כלומר מצא L מטריצה משולשית תחתונה, U מטריצה משולשית עליונה כך ש

$$B=LU$$

פתרון: נציב $a=0$ בסעיף הקודם ונשתמש בדירוג שכבר ביצענו

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

נמיר את הפעולות אלנמטריות במטריצות אלמנטריות כדי לקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

ואז =

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}= \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

נגדיר

$$L=\begin{pmatrix}1&&\\1&1&\\&1&1\end{pmatrix},U=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

ונקבל את המבוקש.

(ג) (10 נק') פתור את המערכת

$$Lx=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

כאשר L היא המטריצה מסעיף קודם.
פתרון: צריך לפתור

$$\begin{pmatrix}1&&\\1&1&\\&1&1\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

כיוון ש L הפיכה, אזי יש פתרון יחיד למערכת. קל לראות כי הפתרון הוא

$$x=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(ד) (10 נק') נסמן ב b וקטור המקיים $Lb=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ (כלומר פתרון מסעיף קודם). פתור את המערכת

$$Ux=b$$

ואת המערכת

$$Bx=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

כאשר B,U,L הן המטריצות מסעיפים קודמים.
הערה: יש סיבה ששני המערכות האלו נמצאות באותו סעיף.
פתרון: המערכת הראשונה היא

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

נבצע דירוג על המטריצה המורחבת

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&2&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

כלומר הפתרון הוא =

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

טענה: זהו הפתרון גם למערכת $Bx = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. הוכחה:
שקול לפתור

$$LUx = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כיוון ש

$$Lb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אזי

$$LUx = Lb$$

כיוון ש L הפיכה, נכפיל בהופכית ונקבל כי

$$Ux = b$$

ולכן זהו אותו פתרון.
שימו לב כי B הפיכה לפי סעיף א ולכן יש פתרון יחיד.

חלק 2 - שאלות עם נימוק

1. (20 נק') יהיו $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצות המקיימות $AB = 0$. הוכח/הפרך

(א) $BA = 0$
פתרון: הפרכה: ניקח

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומתקיים כי

$$AB = 0$$

אבל

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ב) נסמן את עמודות B ב $b_1, b_2 \ldots b_n$ אזי $v = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ הוא פתרון למערכת $Ax = 0$
פתרון: הוכחה:

$$Av = A\left(b_1 + b_2 + \cdots + b_n\right) = Ab_1 + Ab_2 + \cdots + Ab_n = C_1(AB) + C_2(AB) + \cdots + C_n(AB) = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$$

2. (30 נק') הוכח/הפרך

(א) תהא A מטריצה ריבועית. אם A סימטרית אז בהכרח $-A$ (מינוס A) אנטי סימטרית.
פתרון: הפרכה

$$(-A)^t = -A^t = -A$$

ולכן $-A$ סימטרית. אם היא היתה גם אנטי סימטרית היא היתה שווה למטריצת האפס. לכן ניקח

$$A = I$$

למשל כהפרכה אפשרית.

(ב) תהא A מטריצה מדורגת עם מספר עמודות כמספר איברים מובילים אז בהכרח יש פתרון יחיד $Ax = 0$
פתרון: הוכחה: לא יכול להיות שורת סתירה (כי משווים ל-0, כלומר מערכת הומוגנית). מצד שני אין משתנים חופשיים כי בכל עמודה יש איבר מוביל. ולכן יש פתרון יחיד (נ.ב. הפתרון הוא $x = 0$)

(ג) תהא $A \in \mathbb{C}^{4\times 5}$ אזי בהכרח יש אינסוף פתרונות למערכת $Ax = 0$
פתרון: הוכחה: לא יכול להיות שורת סתירה (כי משווים ל-0, כלומר מערכת הומוגנית). מצד שני, בודאות יש משתנים חופשיים כי יש 5 משתנים ואיברים מובילים יש לכל היותר 4 (כי זה מספר השורות). לכן יש אינסוף פתרונות.

3. (10 נק') הוכח:
תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית לא הפיכה. אזי בהכרח קיים $b \in \mathbb{F}^n$ כך שלמערכת $Ax = b$ אין פתרון.
פתרון: הוכחה: כיוון ש A לא הפיכה אזי בדירוג לצורה קנונית נקבל שורת אפסים בסוף. נסמן את מכפלת המטריצות האלמנטריות שמדרגות את A לצורה קנונית ב E. מתקיים

$$EA = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * \\ \vdots & & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

בנוסף E הפיכה כמכפלה של הפיכות.

טענה עבור הוקטור $b = E^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ למערכת

$$Ax = b$$

אין פתרון. הוכחה: נכפיל את שני האגפים ב E ונקבל

$$EAx = Eb$$

כלומר

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * \\ \vdots & & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

שיש בה שורת סתירה ולכן אין פתרון.