פתרון תרגיל בית 9 – טופולוגיה

<u>שאלה 1</u>

הוכיחו או הפריכו:

א. $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\cong\mathbb{Q}$;

ב. $(2,5)\cup(7,8)\cong(-3,-1)\cup\{0\}$.

<u>פתרון</u>

א. לא קיים המיאומורפיזם כזה, שכן העוצמות של המרחבים שונות.

ב. המרחבים אינם הומיאומורפיים שכן הומאימורפיזם מעביר מרכיב קשירות למרכיב קשירות (הוכחנו זאת בתרגול). בשני המרחבים יש שני מרכיבי קשירות. לו היה קיים הומיאומורפיזם, התמונה של מרכיב הקשירות $\{0\}$ היתה $(2,5)$ או $(7,8)$ (אלה מרכיבי הקשירות של המרחב השני). אבל זה כמובן בלתי אפשרי וסותר את החד-ערכיות של הפונקציה.

<u>שאלה 2</u>

יהי (X,τ) מרחב טופולוגי עם התכונה הבאה: לכל נקודה קיימת סביבה קשירה מסילתית. הוכיחו שכל מרכיב קשירות מסילתית הוא קבוצה פתוחה. הסיקו שכל מרכיב קשירות מסילתית הוא גם קבוצה סגורה.

<u>פתרון</u>

יהי C מרכיב קשירות מסילתית. נרצה להראות שזו קבוצה פתוחה. יהי $x\in C$ ונראה שקיימת סביבה U של x כך ש- $x\in U\subseteq C$. לפי הנתון קיימת סביבה קשירה מסילתית V של x. נרצה להראות שזו הסביבה הדרושה. נותר להראות ש- $C\subseteq V$ אך זה נובע מהגדרה של מרכיבי הקשירות המסילתיים (מדוע?).

כעת נראה שכל מרכיב קשירות מסילתית הוא גם קבוצה סגורה.

נציג שתי דרכים:

דרך א'

יהי C מרכיב קשירות מסילתית. הוא קשיר ולכן מוכל במרכיב קשירות כלשהו D. ראיתם בהרצאה שכל מרכיב קשירות מתפרק לאיחוד זר של מרכיבי קשירות מסילתית. נניח בשלילה שיש יותר ממרכיב קשירות מסילתית אחד ב-D. נסמן $D=\bigcup_i C_i$ כאשר אחד מה-C_i הוא C. כעת, מכיון שכל מרכיב קשירות מסילתית פתוח, נקבל ש-$D\setminus C$ פתוח (כאיחוד של פתוחים) ולכן C סגור ב-D.

כלומר, מצאנו ב-D קבוצה סגוחה לא טריוויאלית בסתירה לקשירות של D. לכן יש ב-D רק מרכיב קשירות מסילתית אחד, ולכן $D=C$. אך מרכיבי הקשירות הם סגורים ולכן C סגור.

דרך ב'

יהי $P=\{P_i : i\in I\}$ אוסף מרכיבי הקשירות המסילתית של X. יהי P_{i_0} אחד ממרכיבי הקשירות המסליתית. נראה שהוא סגור. מתקיים $X=\bigcup_{i\in I} P_i = P_{i_0}\cup\left(\bigcup_{i\in I\setminus\{i_0\}} P_i\right)$ (שימו לב שזהו איחוד זר!). מכיוון שמרכיבי הקשירות המסילתית הם פתוחים, נקבל ש-$\bigcup_{i\in I\setminus\{i_0\}} P_i$ פתוחה ולכן P_{i_0} סגורה (כמשלים של פתוחה).

שאלה 3

א. הוכיחו שכל מרחב טופולוגי דיסקרטי הוא קומפקטי אמ"מ הוא סופי.

ב. יהי X מ"ט קומפקטי. יהי $\{K_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות סגורות, כך שכל חיתוך סופי של קבוצות מאוסף זה אינו ריק. הוכיחו ש-$\bigcap_{i\in I} K_i \neq \emptyset$.

פתרון

א. יהי X מ"ט קומפקטי ודיסקרטי אזי $\{\{x\} : x\in X\}$ כיסוי פתוח של X ובשל הקומפקטיות קיים לו תת כיסוי סופי. מכאן נקבל ש-X סופי.

בכיוון ההפוך הטענה נכונה גם ללא הנחת הדיסקרטיות. יהי (X,τ) סופי אזי $|\tau| \le |P(X)| = 2^{|X|} < \infty$ ומכאן קל להסיק כי לכל כיסוי פתוח קיים תת כיסוי סופי שכן מספר הקבוצות הפתוחות (איברי τ) הוא סופי.

ב. יהי X מ"ט קומפקטי. יהי $\{K_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות סגורות, כך שכל חיתוך סופי של קבוצות מאוסף זה אינו ריק. נוכיח כי $\bigcap_{i\in I} K_i \neq \varnothing$. נניח בשלילה כי $\bigcap_{i\in I} K_i = \varnothing$. על-פי דה-מורגן נקבל:

$X = \varnothing^c = \bigcup_{i\in I} {K_i}^c = \left(\bigcap_{i\in I} K_i\right)^c$. מכיון שבנוסף $\{K_i\}_{i\in I}$ אוסף סגורות הרי ש- $\{{K_i}^c\}_{i\in I}$ הוא כיסוי פתוח של X. נתון ש- X קומפקטי ולכן קיימים $i_1,....,i_n$ כך ש $\bigcup_{m=1}^{n} \left(K_{i_m}\right)^c = X$. נשתמש שוב בכלל דה-מורגן ונקבל $\bigcap_{m=1}^{n} K_{i_m} = \varnothing$ ומצאנו חיתוך סופי ריק של קבוצות מהאוסף $\{K_i\}_{i\in I}$, בסתירה לנתון.

שאלה 4

א. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. יהיו $A_1,...,A_n$ תת-מרחבים קומפקטיים של X. הוכיחו ש- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ הוא קומפקטי.

ב. מצאו דוגמה נגדית כאשר מדובר באינסוף תת-מרחבים קומפקטיים.

ג. יהי X מ"ט האוסדורף. יהי $\{F_i\}_{i\in I}$ אוסף כלשהו של תת-מרחבים קומפקטיים. הוכיחו כי $\bigcap_{i\in I} F_i$ קומפקטי.

פתרון

א. יהיו $A_1,...,A_n$ תתי מרחבים קומפקטיים של X. נראה כי $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ הינו קומפקטי. יהי $\{U_j\}_{j\in J}$ כיסוי פתוח ל- A ב- X, כלומר: $A\subseteq\bigcup_{j\in J} U_j$. לכל $1\le i\le n$ $A_i\subseteq A\subseteq\bigcup_{j\in J} U_j$ קומפקטי ולכן קיימת תת-קבוצה סופית $F_i\subseteq J$ כך ש $A_i\subseteq\bigcup_{j\in F_i} U_j$. תהי $F=\bigcup_{i=1}^{n} F_i$. אזי F תת קבוצה סופית של J כאיחוד של מספר סופי של קבוצות סופיות ומתקיים $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i\subseteq\bigcup_{j\in F} U_j$. מצאנו תת כיסוי סופי ומכאן $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ קומפקטי.

ב. ניקח X אינסופי עם טופולוגיה דיסקרטית. הוא לא קומפקטי אבל ניתן להשיג אותו כאיחוד הנקודונים שכל אחד מהם כן קומפקטי.

ג. F_i קומפקטי לכל $i\in I$. X האוסדורף ולכן F_i סגורה ב- X לכל $i\in I$. לכן $A=\bigcap_{i\in I} F_i$ סגורה ב- X. יהי $i_0\in I$ ומתקיים $A\subseteq F_{i_0}$, לכן $A=\bigcap_{i\in I} F_i$ סגורה גם ב- F_{i_0}. מכיון ש- F_{i_0} קומפקטי ו- A ת"מ סגור שלו נקבל ש- $A=\bigcap_{i\in I} F_i$ ת"מ קומפקטי.

שאלה 5

תהי $f:X\to Y$ פונקציה חח"ע ועל.

א. הוכיחו שאם f פתוחה או סגורה ואם X הוא האוסדורף אזי Y הוא האוסדורף.

ב. הוכיחו שאם f רציפה ו- Y האוסדורף, אזי X האוסדורף.

פתרון

א. נוכיח קודם טענת עזר:

טענה:

תהי $f:X\to Y$ חח"ע ועל, אזי f פתוחה אמ"מ f סגורה.

הוכחת טענת עזר:

$f:X\to Y$ חח"ע ועל ולכן לפי שאלה 2 בתרגיל 1 (הסתכלו בפתרון) לכל $A\subseteq X$ מתקיים $f\left(A^C\right)=\left(f\left(A\right)\right)^C$. כעת נניח ש- f פתוחה ונראה ש- f סגורה. תהי $A\subseteq X$ סגורה אזי A^C פתוחה ב- X ומכיון ש- f פתוחה נקבל ש-$f\left(A^C\right)$ פתוחה. אבל $f\left(A^C\right)=\left(f\left(A\right)\right)^C$ ומכאן $\left(f\left(A\right)\right)^C$ פתוחה ולכן $f\left(A\right)$ סגורה. קיבלנו ש- f סגורה. באופן דומה מוכיחים שאם f סגורה אז f פתוחה (תחת ההנחה ש- f חח"ע ועל).

מש"ל

נחזור להוכחת התרגיל. על-פי טענת העזר אפשר להניח ש- f פתוחה. כדי להוכיח ש- Y האוסדורף ניקח $y_1\neq y_2\in Y$. הפונקציה $f:X\to Y$ היא על ולכן קיימים $x_1\neq x_2\in X$ כך ש- $f\left(x_1\right)=y_1,\ f\left(x_2\right)=y_2$. X האוסדורף ולכן קיימות U סביבה של x_1, V סביבה של x_2 כך ש- $U\cap V=\varnothing$. בשל העובדה ש- f פתוחה נקבל ש- $f\left(U\right),f\left(V\right)$ סביבות של y_1,y_2 בהתאמה. לבסוף נראה כי $f\left(U\right),f\left(V\right)$ זרות. אמנם, נניח בשלילה ש- $f\left(U\right)\cap f\left(V\right)\neq\varnothing$ אזי $\exists z\in f\left(U\right)\cap f\left(V\right)$. לכן, קיימים $x\in U,\ y\in V$ כך ש-

$f(x)=f(y)=z$. אבל f חח"ע ומכאן $x=y\in U\cap V$. בסתירה לכך ש-$U\cap V=\varnothing$. מצאנו את ההפרדה הדרושה ומכאן Y האוסדורף.

ב. יהיו $x_1\neq x_2\in X$. f חח"ע ומכאן $f(x_1)\neq f(x_2)\in Y$. Y האוסדורף ולכן קיימות U,V סביבות זרות של $f(x_1),f(x_2)$ בהתאמה. f רציפה ולכן $f^{-1}(U),f^{-1}(V)$ סביבות של x_1,x_2 והן זרות שכן $f^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)=f^{-1}(U\cap V)=f^{-1}(\varnothing)=\varnothing$.

שימו לב: סעיף ב' נכון גם אם f אינה על (שימו לב שאכן לא נעזרנו בנתון זה בהוכחה).

<u>שאלה 6</u>

יהי (X,τ) מרחב טופולוגי האוסדורף. יהי $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ אוסף של תת-מרחבים קומפקטיים לא ריקים כך שמתקיים $E_1\supseteq E_2\supseteq E_3\supseteq\ldots$. הוכיחו ש-$\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i\neq\varnothing$.

תנו דוגמה נגדית למקרה שהתת-מרחבים אינם קומפקטיים.

<u>פתרון</u>

נניח בשלילה ש-$\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i=\varnothing$. מתקיים $E_1\subseteq X=X\setminus\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}(X\setminus E_i)$. נתון ש-$E_i$ הם תת-מרחבים קומפקטיים, ולכן כקבוצות, E_i הן תת-קבוצות סגורות. מכאן $\{X\setminus E_i\}_{i=1}^{\infty}$ הוא כיסוי פתוח של E_1. מכיוון ש-E_1 קומפקטי, קיים תת-כיסוי סופי: $E_1\subseteq X\setminus E_{i_1}\cup X\setminus E_{i_2}\cup\ldots\cup X\setminus E_{i_k}$, כאשר בה"כ $E_{i_1}\supseteq E_{i_2}\supseteq\ldots\supseteq E_{i_k}$. לכן, $X\setminus E_{i_1}\subseteq\ldots\subseteq X\setminus E_{i_k}$ ומכאן $E_1\subseteq X\setminus E_{i_k}$ וזו סתירה לכך ש-$E_1\supseteq E_{i_k}\neq\varnothing$.

דוגמה נגדית: למשל ב-$\mathbb{R}$ ניתן לקחת את $E_i=\left(0,\frac{1}{i}\right)$ או את $E_i=[i,\infty)$.

שאלה 7

א. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי אינסופי המקיים את התכונה הבאה: כל תת-מרחב הוא קומפקטי. הוכיחו ש-(X,τ) אינו האוסדורף.

ב. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי שאינו בן מניה ואינו קומפקטי. הוכיחו שקיים ב- X מספר לא בן מניה של תת-מרחבים קומפקטיים ומספר לא בן מניה של תת-מרחבים לא קומפקטיים.

ג. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי, כך שכל תת-מרחב סגור לא טריוויאלי הוא קומפקטי. הוכיחו ש-(X,τ) קומפקטי.

פתרון

א. נניח בשלילה ש-(X,τ) הוא האוסדורף. כל תת-מרחב הוא קומפקטי ולכן סגור. לכן τ היא הטופולוגיה הדיסקרטית. ראינו שמ"ט דיסקרטי הוא קומפקטי אמ"מ הוא סופי. שימו לב ש- X הוא קומפקטי ודיסקרטי ולכן סופי, בסתירה לנתון.

ב. תת-מרחבים קומפקטיים: כל הנקודונים. ברור שיש מספר לא בן מניה של נקודונים.

תת-מרחבים לא קומפקטיים: כל המרחבים מהצורה $X\setminus\{x\}$. ברור שיש מספר לא בן מניה של מרחבים כאלה. נראה מדוע הם לא קומפקטיים. נניח בשלילה ש-$X\setminus\{x\}$ קומפקטי. מכיוון שגם $\{x\}$ קומפקטי, נקבל ש-$X=(X\setminus\{x\})\cup\{x\}$ קומפקטי (תרגיל 4 א' בקובץ הנוכחי), בסתירה לנתון.

ג. יהי $\{U_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של X ונמצא תת-כיסוי סופי. נבחר את אחת הקבוצות הלא ריקות מהכיסוי U_{i_0} (אם כולן ריקות, אז גם X ריקה ולכן הטענה ברורה). אם $U_{i_0}=X$ סיימנו. אחרת המשלים $X\setminus U_{i_0}$ הוא סגור ולא טריויאלי ולכן קומפקטי. $\{U_i\}_{i\in I}$ הוא כיסוי פתוח של $X\setminus U_{i_0}$ ב- X ולכן קיים לו תת-כיסוי סופי: $\{U_{i_j}\}_{j=1}^{n}$. נקבל ש- $X=U_{i_o}\cup\left(\bigcup_{j=1}^{n}U_{i_j}\right)$.