בחינה בקורס **חשבון אינפיניטסימלי 1** (88-132-05/07) - מועד א'

אוניברסיטת בר-אילן, יום ו, י אדר א תשע"ט (15.2.19 למ')

מרצים: פרופ' בועז צבאן, פרופ' בוריס קוניאבסקי.

מתרגלים: רועי אבל, ניקול בלשוב, דורון פרלמן.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

הנחיות

א. יש לענות על **4** מתוך 5 השאלות.

השתמש במחברת הבחינה לטיוטה, ולאחר שמצאת פתרון מספק, כתוב אותו בצורה מסודרת **בגוף הבחינה**, במקום הפנוי המצוי לאחר השאלה. אם מוכרחים, אפשר להמשיך תשובה בגב אותו דף. על פי רוב, לא תתקבל תשובה המשתרעת על פני יותר משני עמודים.

טופס הבחינה אמור להספיק לכתיבת התשובות. אם מסיבה כלשהי הטופס לא הספיק, נא בקש מהבוחנים טופס נוסף, אשר ישודך לטופס המקורי. במידה שהנך עונה על שאלה בדף שאינו דף התשובה לשאלה זו, כתוב בבירור היכן ניתן למצוא את התשובה. נהג באותו אופן עם תשובה שנמשכת בדף אחר מדף התשובה.

ב. משקל כל שאלה הוא 24 נקודות. בשאלות עם יותר מסעיף אחד, הנקודות מתחלקות בשווה בין הסעיפים. 4 נקודות מוקצות עבור סדר ונקיון הבחינה.

ג. הקף בעיגול, בטבלה הבאה, את מספרי השאלות שעליהן ענית.

ארבע השאלות שבחרתי (להקיף בעיגול)	**ניקוד** (לשימוש הבודקים)
1	
2	
3	
4	
5	
סדר ונקיון	
סה"כ	

שאלות המבחן מופיעות בעמודים הבאים.

הבהרה. גם אם הדבר לא מצויין במפורש בשאלות, עליך לנמק את כל תשובותיך. תשובה נכונה ללא נימוקים מספיקים עלולה לקבל ניקוד נמוך.

בהצלחה!

שאלה 1

הוכח את **משפט לייבניץ על טורים עם סימן מתחלף:** תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סידרה יורדת המתכנסת לאפס. אזי:

א. הטור $\sum(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס.

ב. שאריות הטור מקיימות $|r_k| \leq a_{k+1}$.

(רמז: סכימה בזוגות.)

תשובה:

שאלה 2

נאמר שסידרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **חד־חד ערכית** אם לכל שני מספרים טבעיים $i \neq j$ מתקיים $x_i \neq x_j$.

תהי f פונקציה ממשית, ותהי a נקודת הצטברות של תחום ההגדרה של הפונקציה f.

הוכח: $\lim_{x \to a} f(x) = b \iff$ לכל סידרה **חד־חד ערכית** $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ בתחום ההגדרה של הפונקציה כך ש $x_n \longrightarrow a$, מתקיים $f(x_n) \longrightarrow b$.

תשובה:

שאלה 3

נתונה העובדה הבאה (אינך מתבקש להוכיחה):

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\log n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma := 0.57721\ldots$$

א. יהי $0 < a$ מספר ממשי. הוכח שהטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\log n}$ מתכנסים ומתבדרים ביחד.

ב. לכל מספר ממשי $0 < a$, קבע האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$ מתכנס או מתבדר.

תשובה:

שאלה 4

מצא את הנקודות בהן הפונקציה

$$f(x) := [x] + [-x]$$

אינה רציפה. עבור כל נקודת אי־רציפות, מצא את סוג אי הרציפות שלה.

(עבור מספר ממשי a, $[a] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq a\}$ הוא הערך השלם של a.)

תשובה:

שאלה 5

תהי

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ ax + b & x > 2 \end{cases}.$$

א. מצא את ערכי הפרמטרים a, b שעבורם הפונקציה f גזירה בכל הישר הממשי.

ב. האם יש פרמטרים a, b כך שהנגזרת השניה f'' קיימת בכל הישר הממשי?

תשובה: