פתרון תרגיל 12

1. נשתמש בנוסחת קושי הדמר

(א) $a_n = \frac{1}{n^p}$ ואז

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^p} = 1$$

ללא תלות ב p.

(ב) כאן יותר קל להשתמש בדאלאמר. $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ולכן

$$|\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \frac{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}{\frac{(n+1!)^2}{(2n+2)!}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{4n+2}{n+1}$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n+2}{n+1} = 4$$

כלומר $R = 4$

2. מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים:

(א) קל לראות שרדיוס ההתכנסות הוא 1 מפני ש

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^3}} = 1$$

בקצוות $x = \pm 1$ מתקבלים הטורים

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^3$$

ששניהם מתבדרים (מפני שהסדרות $n^3, (-1)^n n^3$ לא מתכנסות ל 0). ולכן תחום ההתכנסות הוא $(-1, 1)$.

(ב) נציב $t = x^2$ כדי לעבור לטור חזקות רגיל

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{(2n)!}$$

ואז

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}$$

נחשב את רדיוס ההתכנסות לפי דאלאמבר

$$|\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \frac{\frac{1}{(2n)!}}{\frac{1}{(2n+2)!}} = (2n+1)(2n+2) \to \infty$$

ולכן תחום ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{(2n)!}$$

הוא $\mathbb{R}$ ולכן גם תחום ההתכנסות של הטור המקורי הוא $\mathbb{R}$.

(ג) נשים לב שלכל ערך $n \in \mathbb{N}$ מתקיים ש

$$\frac{1}{2} \leq |\cos\frac{n\pi}{3}| \leq 1$$

ולכן

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \leq \sqrt[n]{|\cos\frac{n\pi}{3}|} \leq 1$$

היות ושתי הסדרות בצדדים מתכנסות ל 1 גם הסדרה האמצעית מתכנסת ל 1 ולכן

$$R = 1$$

נותר לבדוק את הקצוות $x = \pm 1$ אבל $\cos\frac{\pi n}{3}$ לא מתכנסת ל 0 ולכן תחום ההתכנסות הוא $(-1, 1)$.

(ד) שוב נשתמש בדאלאמבר כאשר $a_n = n!$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0$$

ולכן $R = 0$ כלומר תחום ההתכנסות הוא $\{0\}$.

(ה) נחשב רדיוס התכנסות עם קושי הדמר כאשר $a_n = \frac{(\ln n)^n}{n^{(\ln n)}}$

$$\sqrt[n]{\frac{(\ln n)^n}{n^{(\ln n)}}} = \frac{\ln n}{n^{\frac{\ln n}{n}}}$$

אם נסתכל רגע רק על המכנה

$$n^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\frac{\ln^2 n}{n}} \to e^0 = 1$$

בעוד שהמונה מתכנס ל ∞ ולכן

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(\ln n)^n}{n^{(\ln n)}}} = \infty$$

ולכן $R = 0$ ותחום ההתכנסות הוא $\{0\}$.

3. ידוע כי הטור הנ"ל מתכנס ל e^x בכל $\mathbb{R}$, (ואפשר גם לבדוק די בקלות שרדיוס ההתכנסות שלו הוא ∞) ולכן הוא מתכנס במ"ש בכל תת קטע סגור, נניח $[-100, 100]$ ולכן בוודאי מתכנס במ"ש גם ב $(-100, 100)$. מצד שני,הוכחנו בכיתה שאין טור חזקות שמתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$.

4. היות ש a_n מונוטונית יורדת ומתכנסת ל 0 אנחנו יודעים לפי משפט לייבניץ שהטור

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$$

מתכנס. כמו כן נתון כי הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$$

מתבדר.
במילים אחרות,אם נסתכל על טור החזקות

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

הוא מתכנס עבור $x = -1$ ולא עבור $x = 1$ ולכן בהכרח רדיוס ההתכנסות שלו הוא $R = 1$.

5. ידוע כי

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

ולכן

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}$$

כלומר

$$\int_0^1 e^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}\mathrm{d}t$$

הטור הזה מתכנס במ"ש (נניח ב $[-2, 2]$) ולכן אפשר להשתמש באינטגרציה איבר איבר

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(2n+1)}$$

זה טור לייבניץ שמקיים ש

$$|S_n - S| \le a_{n+1}$$

לכן מספיק למצוא n עבורו $a_{n+1} < \frac{1}{100}$. אם נבדוק קצת נראה ש

$$a_4 < \frac{1}{100}$$

ולכן S_3 ייתן לנו קירוב טוב מספיק, כלומר

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42}$$