תרגול אנליזה מודרנית 7

<u>תזכורת:</u> יהי (X,S,μ) ממ"ח. מרחב לבג ממעלה $1 \le p < \infty$ מוגדר ע"י

$L^p(X,S,\mu) = \left\{ f : \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$. מגדירים בנוסף $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$ כך שבעצם

$L^p(X,S,\mu) = \left\{ f : \|f\|_p < \infty \right\}$ סימונים נוספים הם $L^p(X), L^p(\mu), L^p(d\mu)$.

ישנו גם המרחב $L^\infty(X)$ המכיל את כל הפונקציות החסומות בעיקר: $L^\infty(X) = \left\{ f : \|f\|_\infty < \infty \right\}$

כאשר (f) $\|f\|_\infty = \inf_{f\sim g} \sup_{x\in X} |g(x)| = \operatorname{ess\,sup}_X$ או $\|f\|_\infty = \inf\left\{ M : \mu\left(\left\{ x : |f(x)| \ge M \right\}\right) = 0 \right\}$.

תזכורת: (א"ש הולדר)

אם $1 < p,q < \infty$ ו $p^{-1} + q^{-1} = 1$ אז

$$\int |fg| \, d\mu \le \|f\|_p \|g\|_q$$

אי השוויון נכון גם עבור $p = 1$ ו $q = \infty$.

1. <u>תרגיל:</u> נניח כי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ גזירה ברציפות, בעלת "תנאי שפה הומוגניים" $f(a) = f(b) = 0$ ומקיימת $\int_a^b f^2 dm = 1$. הוכיחו כי מתקיים $\int_a^b xff' dm = -\frac{1}{2}$ וגם

$$\left[\int_a^b (f')^2 \, dm \right] \left[\int_a^b x^2 f^2 dm \right] \ge \frac{1}{4}$$

<u>פתרון:</u> הכל רציף ולכן נעבוד עם אינטגרל רימן. נשתמש באינטגרציה לפי חלקים:

$$1 = \int_a^b f^2(x) dx = xf^2(x)\Big|_a^b - \int_a^b 2xf(x) f'(x) dx \Rightarrow \int_a^b xf(x) f'(x) dx = -\frac{1}{2}$$

ניקח ערך מוחלט לקבל

$$\frac{1}{2} = \left| \int_a^b xf(x) f'(x) dx \right| \le \int_a^b |xf(x) f'(x)| dx = \|xff'\|_1 \overset{H\ddot{o}lder}{\le} \|f'\|_2 \|xf\|_2 = \left[\int_a^b (f'(x))^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_a^b x^2 f(x)^2 dx \right]^{1/2}$$

נעלה בריבוע לקבל $\frac{1}{4} \le \left[\int_a^b (f'(x))^2 dx \right] \left[\int_a^b x^2 f(x)^2 dx \right]$.

2. תרגיל: יהי (X,S,μ) ממ"ח ממידה סופית (כלומר $\mu(X)<\infty$) ויהיו $1\le r<p<\infty$.
הוכיחו כי $L^p(X,S,\mu)\subseteq L^r(X,S,\mu)$.

<u>פתרון:</u> תהי $f\in L^p$ המספרים $t=\frac{p}{r}, s=\frac{p}{p-r}$ הם מעריכים צמודים (סכום ההופכיים 1), וע"פ א"ש הולדר

$$\|f\|_r^r=\int_X |f|^r\cdot 1d\mu=\left\||f^r|\cdot 1\right\|_1\le\left(\int_X \left(|f|^r\right)^t d\mu\right)^{1/t}\left(\int_X 1^s d\mu\right)^{1/s}=\left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/t}\mu(X)^{1/s}<\infty$$

ומכאן $\|f\|_r<\infty$ ולכן $f\in L^r$.

<u>דוגמה:</u> הממ"ח $([0,1],L,m)$ סופי. ידוע כי $x^{-1/4}\in L^2([0,1])$ ($\int_0^1 x^{-1/2}dm(x)=2\sqrt{x}\Big|_0^1=2<\infty$)

ולכן מתקיים $x^{-1/4}\in L^1$ או $\int_0^1 x^{-1/4}dm(x)<\infty$.

<u>הערה:</u> אם הממ"ח אינו סופי, אין הכלה בשום כיוון.

3. <u>תרגיל:</u> נתבונן בממ"ח $([0,1],L,m)$, ונגדיר סדרת פונקציות ע"י $g_n(x)=n\cdot I_{[0,n^{-3}]}(x)$.

א. הוכיחו כי לכל $f\in L^2([0,1])$ מתקיים $\int_0^1 f(x)g_n(x)dm(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$.

ב. הראו שיש $f\in L^1([0,1])$ עבורה $\int_0^1 f(x)g_n(x)dm(x)\overset{n\to\infty}{\not\to}0$

<u>פתרון:</u> א.

$$d\left(\int_0^1 f(x)g_n(x)dm(x),0\right)=\left|\int_0^1 f(x)g_n(x)dm(x)-0\right|\le\int_0^1\left|f(x)g_n(x)\right|dm(x)\le\|f\|_2\|g_n\|_2$$

וניתן לחשב $\|g_n\|_2=\left(\int_0^1\left|n\cdot I_{[0,n^{-3}]}\right|^2 dm\right)^{1/2}=\left(\int_0^1 n^2 I_{[0,n^{-3}]}dm\right)^{1/2}=\left(n^2 m\left([0,n^{-3}]\right)\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{n}}$

כלומר $\left|\int_0^1 f(x)g_n(x)dm(x)-0\right|\le\frac{\|f\|_2}{\sqrt{n}}\xrightarrow{n\to\infty}0$ כנדרש (ע"פ תרגיל קודם ניתן להחליף את L^2 בכל מרחב $L^{p>2}$).

ב. ניקח $f = x^{-2/3} \in L^1([0,1])$ (f אינטגרבילית לבג כי היא אינט' רימן בהחלט) . נחשב

$$\int_0^1 f(x) g_n(x)\, dm(x) = \int_0^{n^{-3}} x^{-2/3} n\, dm(x) = 3x^{1/3} n\Big|_{x=0}^{x=n^{-3}} = 3 \xrightarrow{n\to\infty} 3 \neq 0 .$$

תזכורת: נאמר כי הפונקציות f_n מתכנסות ב L^1 לפונקציה f אם $\int |f - f_n| \to 0$. כמו כן נאמר כי הפונקציות f_n מתכנסות ב כב"מ לפונקציה f אם $\lim f_n(x) = f(x)$ כב"מ . נאמר כי הפונקציות f_n מתכנסות ב במידה לפונקציה f אם לכל $\varepsilon < 0$ מתקיים כי

$$\lim \mu\left\{x : |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\right\} = 0 .$$

4. הוכיחו כי התכנסות ב L^1 גוררת התכנסות במידה.

פתרון: עפ"י הגדרה נובע כי

$$\lim \mu\left\{x : |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\right\} = \lim \int_X 1_{\{x:|f(x)-f_n(x)|>\varepsilon\}}\, d\mu =$$

$$\lim \int_{\{x:|f(x)-f_n(x)|>\varepsilon\}} 1\, d\mu = \lim \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon \int_X 1_{\{x:|f(x)-f_n(x)|>\varepsilon\}}\, d\mu$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon} \lim \int_X |f(x) - f_n(x)|\, d\mu = 0$$

האם התכנסות במידה גוררת התכנסות ב L^1?

תשובה: $f_n = n 1_{[0,\frac{1}{n}]}$ ...

5. נניח כי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שייכת ל L^p עבור $p > 1$ מסויים וכן גם ב L^1 . הראו כי קיימים קבועים $c > 0$ ו $\alpha \in (0,1)$ כך ש

$$\int_A |f(x)|\, dx \leq c\, m(A)^\alpha$$

פתרון: מזה ש $f \in L^1$ אנחנו יודעים כי $\int_A |f(x)|\, dx < \infty$. מכיוון ש $f \in L^p$ עבור $p > 1$ נסמן את הנורמה שלו ב $\|f\|_p = c$.עפ"י א"ש הולדר נקבל

$$\|f1_A\|_1 \le \|f\|_p \|1_A\|_q$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \left| f(x) 1_A(x) \right| dx = \int_A \left| f(x) \right| dx \le \left(\int_{\mathbb{R}} \left| f(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_A(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= cm(A)^{\frac{1}{q}}$$

נותר להראות כי $\frac{1}{q} \in (0,1)$. $q = \frac{p}{p-1} > 1 \Rightarrow \frac{1}{q} \in (0,1)$.

6. יהי (X, S, μ) ממ"ח כך ש $\mu(X) = 1$, ותהי $g : X \to \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית ו f פונקציה קמורה . הוכיחו את אי שוויון יאנסן

$f\left(\int g d\mu\right) \le \int f(g) d\mu$.

פתרון: נשתמש בתכונה של פונקציות קמורות: קיים מספר ממשי c כך שמתקיים $f(y) \ge f(x) + c(y-x)$ לכל $y \in \mathbb{R}$. נציב $x = \int f(g) d\mu$ ו $y = g$ נבצע אינטגרציה לשני האגפים ונקבל מלינאריות האינטגרל כי

$$\int f(g) d\mu \ge \int f\left(\int g d\mu\right) + c\left(g - \left(\int g d\mu\right)\right) d\mu =$$

$$f\left(\int g d\mu\right) + c\left(\left(\int g d\mu\right) - \left(\int g d\mu\right)\right) = f\left(\int g d\mu\right)$$