$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(nx)+\frac{3}{4}\sin 2x=\frac{3}{4}\sin 2x$ ולכן $a_n=0$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}nb_n\sin(nx)=1$$

$$nb_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx=-\frac{2}{n\pi}\cos(nx)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{n\pi}\left(1+(-1)^{n+1}\right)=\begin{cases}0, & n=2k\\ \frac{4}{n\pi}, & n=2k+1\end{cases}$$

$$b_n=\begin{cases}0, & n=2k\\ \frac{4}{n^2\pi}, & n=2k+1\end{cases}$$

הפתרון הפרטי: $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{(2k+1)^2\pi}\sin((2k+1)t)\right)\sin((2k+1)x)+\frac{3}{4}\sin 2x$

ב) פתרון מוכלל, לא אמיתי.

תנאי תאימות לא מתקיים: $u_t(x,0)=1$ ומתנאי שפה $u_t(0,t)=0$.

<u>שאלה 4 (25 נקודות)</u> נתבונן בבעיית לפלס במלבן D יחד עם תנאי נוימן:

$$\begin{cases}\Delta u=0, & 0<x,y<\pi,\\ u_y(x,\pi)=\sin^2 x-\alpha,\quad u_y(x,0)=0, & 0\le x\le\pi,\\ u_x(0,y)=u_x(\pi,y)=0, & 0\le y\le\pi.\end{cases}$$

א. (8 נקודות) עבור אילו ערכים של α קיים פתרון לבעיה.

ב. (12 נקודות) פתור את הבעיה, האם הפתרון יחיד?

ג. (5 נקודות) נתון $u\left(\frac{\pi}{2},0\right)=\frac{1}{4\sinh(2\pi)}$. הראה כי $\left|\max_{0\le x,y\le\pi}u(x,y)\right|\le\frac{\coth(2\pi)}{4}$.

<u>פתרון</u>

א. לפי תנאי הכרחי לקיום פתרון עבור בעיית נוימן מתקיים:

$$0=\oint_{\partial D}\partial_n u\,ds=\int_{\pi}^{0}u_y(x,\pi)dx=-\int_0^{\pi}(\sin^2 x-\alpha)dx=\pi(\alpha-0.5)$$

לכן $\alpha=0.5$.

ב. נחפש פתרון מופרד

נציב $u(x,y)=X(x)Y(y)$ במד"ח ונקבל את בעיית שטרום-ליוביל הבאה

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X'(0)=X'(\pi)=0\end{cases}$$

עם פ"ע וע"ע $n=0,1,2,...$ $\lambda_n=n^2$, $X_n(x)=\cos(nx)$, ולכן המשוואה עבור $Y_n(y)$
היא מהצורה $Y''-n^2Y=0$ עם פתרון $Y_0=A_0+B_0y$ ו- $Y_n=A_ne^{ny}+B_ne^{-ny}$
עבור $n\geq 1$.
לפי עקרון הסופרפוזיציה נקבל פתרון כללי

$$u(x,y)=A_0+B_0y+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_ne^{ny}+B_ne^{-ny}\right]\cos(nx)$$

$$u_y(x,y)=B_0+\sum_{n=1}^{\infty}n\left[A_ne^{ny}-B_ne^{-ny}\right]\cos(nx)$$

מימוש תנאי שפה $u_y(x,0)=0$ גורר

$u_y(x,0)=B_0+\sum_{n=1}^{\infty}n\left[A_n-B_n\right]\cos(nx)=0$ ולכן $B_0=0$, $A_n=B_n$, $n\geq 1$.

מאחר ש- $\sin^2 x-0.5=-\frac{1}{2}\cos(2x)$, תנאי שפה $u_y(x,\pi)=\sin^2 x-0.5$ גורר

$$u_y(x,\pi)=\sum_{n=1}^{\infty}nA_n\left[e^{n\pi}-e^{-n\pi}\right]\cos(nx)=-\frac{1}{2}\cos(2x)$$

ואז כל המקדמים מתאפסים פרט ל- $A_2=B_2=\dfrac{-1}{8\sinh(2\pi)}$.

הפתרון עד כדי קבוע

$$u(x,y)=A_0-\frac{1}{8\sinh(2\pi)}[e^{2y}+e^{-2y}]\cos(nx)=A_0-\frac{1}{4\sinh(2\pi)}\cosh(2y)\cos(nx)$$

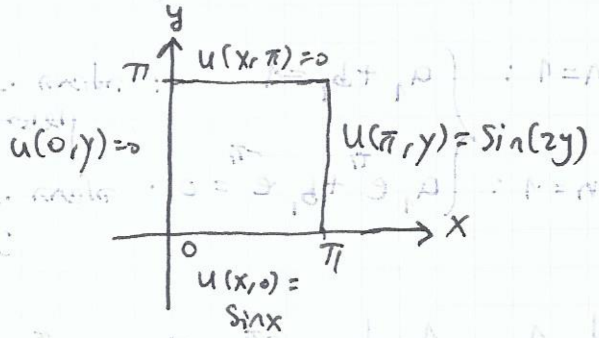
ג.

$u\left(\frac{\pi}{2},0\right)=A_0+\dfrac{1}{4\sinh(2\pi)}=\dfrac{1}{4\sinh(2\pi)}$, ואז $A_0=0$.

לכן הפתרון המתקבל: $u(x,y)=-\dfrac{1}{4\sinh(2\pi)}\cosh(2y)\cos(nx)$

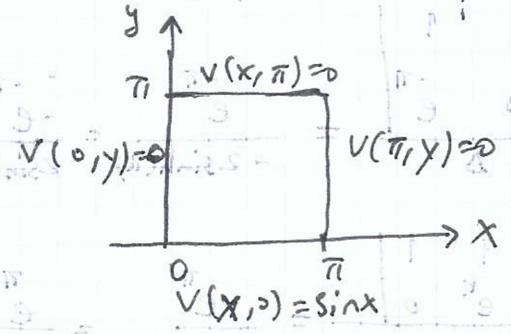
הפונקציה הרמונית ורציפה, לכן המקסימום מתקבל בשפה. מכאן:

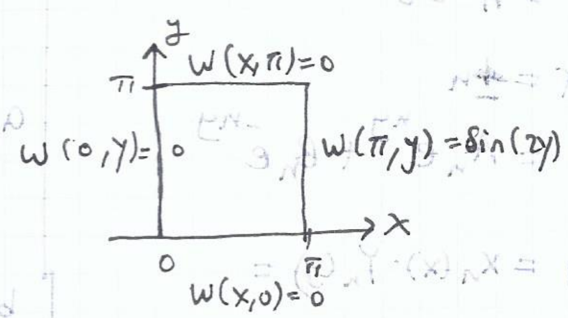
$$\left|\max_{0<x,y<\pi} u(x,y)\right|\leq\frac{\cosh(2\pi)}{4\sinh(2\pi)}.$$



$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 , & 0<x,y<\pi \\ u(x,0)=\sin x , & 0\le x\le \pi \\ u(x,\pi)=0 , & 0\le x\le \pi \\ u(0,y)=0 , & 0\le y\le \pi \\ u(\pi,y)=0 , & 0\le y\le \pi \end{cases}$$

שני תנאים גם לפי x וגם לפי y לא מתאפסים לכן נגדיר $u=v+w$ כאשר v ו- w הרמוניות.





$$\begin{cases} V_{xx}+V_{yy}=0 \\ V(x,0)=\sin x \\ V(x,\pi)=0 \\ V(0,y)=V(\pi,y)=0 \end{cases}$$

ת. התחלה ($V(x,0)=\sin x$, $V(x,\pi)=0$)

ת. שפה ($V(0,y)=V(\pi,y)=0$)

כעת נעשה הפרדת משתנים:

$V(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$

מתנאי שפה

$V(0,y)=X(0)\cdot Y(y)=0 \Rightarrow X(0)=0$

$V(\pi,y)=X(\pi)\cdot Y(y)=0 \Rightarrow X(\pi)=0$

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda$$

כיוון שתנאי השפה הם על X.

$X(0)=X(\pi)=0$

כאשר:

$$\begin{cases} w_{xx}+w_{yy}=0 \\ w(0,y)=0 \\ w(\pi,y)=\sin(2y) \\ w(x,0)=w(x,\pi)=0 \end{cases}$$

ת. התחלה ($w(0,y)=0$, $w(\pi,y)=\sin(2y)$)

ת. שפה ($w(x,0)=w(x,\pi)=0$)

כעת נעשה הפרדת משתנים $W(x,y)=X(x)Y(y)$

$W(x,0)=X(x)\cdot Y(0)=0 \Rightarrow Y(0)=0$

$W(x,\pi)=X(x)\cdot Y(\pi)=0 \Rightarrow Y(\pi)=0$

$$-\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda$$

כיוון שתנאי השפה הם על Y.

$Y(0)=Y(\pi)=0$

$$\begin{cases} \frac{X''}{X(x)} = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

פ"ע $X_n(x) = C_n \sin(nx)$

$\lambda_n = n^2 \quad , n = 1, 2 \ldots$

$\cancel{-}\frac{Y_n''}{Y_n} = \cancel{-}n^2$

$Y_n'' - n^2 Y_n(y) = 0$

$k^2 - n^2 = 0$

$k = \pm n$

$Y_n(y) = A_n e^{ny} + B_n e^{-ny}$

$V_n(x,y) = X_n(x) \cdot Y_n(y) =$

$= C_n \sin(nx) \cdot [A_n e^{ny} + B_n e^{-ny}]$

$V_n = \sin(nx)[a_n e^{ny} + b_n e^{-ny}]$

$V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x,y)$ מספור פונציה.

$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)[a_n e^{ny} + b_n e^{-ny}]$

נציב תנאי התחלה:

$V(x,0) = \sin x$

$\sum \sin(nx)[a_n + b_n] = \sin(x)$

$$\begin{cases} n=1: & a_1 + b_1 = 1 \\ n \neq 1 & a_n + b_n = 0 \end{cases}$$

$V(x,\pi) = 0$

$\sum \sin(nx)[a_n e^{n\pi} + b_n e^{-n\pi}] = 0$

$\forall n: \quad a_n e^{n\pi} + b_n e^{-n\pi} = 0$

בהמשך

<u>המשך של V</u>:

$$\begin{cases} n=1: & a_1 + b_1 = 1 \\ n=1: & a_1 e^{\pi} + b_1 e^{-\pi} = 0 \end{cases}$$

מ"ת. התחלה הראשון

מ-ית. התחלה השני

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\pi} & e^{-\pi} \end{vmatrix} = e^{-\pi} - e^{\pi} = -(e^{\pi} - e^{-\pi}) =$$

$= -2\sinh(\pi)$

<u>לפי כלל קרמר</u>:

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & e^{-\pi} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{e^{-\pi}}{-2\sinh(\pi)} = \frac{-e^{-\pi}}{2\sinh(\pi)}$$

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\pi} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-e^{\pi}}{-2\sinh(\pi)} = \frac{e^{\pi}}{2\sinh(\pi)}$$

לכל $n \neq 1$:

$$\begin{cases} a_n + b_n = 0 \\ a_n e^{n\pi} + b_n e^{-n\pi} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{n\pi} & e^{-n\pi} \end{vmatrix} = e^{-n\pi} - e^{n\pi} \neq 0$$

ומתאפס רק כאשר $n=0$

אבל המקרה שלנו זה $\forall n \neq 1$.

לכן מ"ע משוואות ליניאריות הומוגניות הדטרמיננטה שונה מאפס לכן רק פתרון האפס.

כלומר לכל $n \neq 1$ $a_n = b_n = 0$

לכן

$$V(x,y) = \left(-\frac{e^{-\pi}}{2\sinh(\pi)} e^{y} + \frac{e^{\pi}}{2\sinh(\pi)} e^{-y}\right) \sin x$$

$$= -\frac{1}{2\sinh(\pi)} \left[e^{y-\pi} - e^{-(y-\pi)} \right] \sin(x)$$

$$V = -\frac{\cancel{2}\sinh(y-\pi)}{\cancel{2}\sinh(\pi)} \sin(x) = -\frac{\sinh(y-\pi)}{\sinh(\pi)} \sin x$$

$$\begin{cases} -\dfrac{X''}{X} = \dfrac{Y''}{Y} = -\lambda \\ Y(0)=Y(\pi)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{Y''}{Y} = -\lambda \\ Y(0)=Y(\pi)=0 \end{cases}$$

$$Y_n(y) = \sin(ny) \quad , \quad \lambda_n = n^2 \qquad n=1,2\ldots$$

$$\cancel{-}\frac{X_n''(x)}{X_n(x)} = \cancel{-}n^2 \quad \Rightarrow \quad X_n''(x) - n^2 X_n(x) = 0$$

$$k^2 - n^2 = 0$$

$$k = \pm n$$

$$X_n(x) = a_n e^{nx} + b_n e^{-nx}$$

$$W_n(x,y) = X_n(x)\cdot Y_n(y) = [a_n e^{nx} + b_n e^{-nx}]\, c_n \sin(ny)$$

$$W_n(x,y) = [A_n e^{nx} + B_n e^{-nx}]\sin(ny)$$

$$W(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(ny)\,[A_n e^{nx} + B_n e^{-nx}]$$

נציב תנאי התחלה:

$$W(0,y)=0$$

$$W(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(ny)\,[A_n + B_n] = 0$$

$$\forall n: \quad A_n + B_n = 0$$

$$W(\pi,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(ny)\,[A_n e^{n\pi} + B_n e^{-n\pi}] = \sin(2y)$$

$$\begin{array}{ll} n=2: & A_2 e^{2\pi} + B_2 e^{-2\pi} = 1 \\ n\neq 2: & A_n e^{n\pi} + B_n e^{-n\pi} = 0 \end{array}$$

נבנה את מערכת המשוואות עבור $n=2$:

$$\begin{cases} A_2 + B_2 = 0 & \leftarrow \text{תנאי התחלה ה-I} \\ A_2 e^{2\pi} + B_2 e^{-2\pi} = 1 & \leftarrow \text{תנאי התחלה ה-II} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{2\pi} & e^{-2\pi} \end{vmatrix} = e^{-2\pi} - e^{2\pi} = -2\sinh(2\pi)$$

נעזר בכלל קרמר $\rightarrow$

$$A_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & e^{-2\pi} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{e^{-2\pi}}{-2\sinh(2\pi)} = \frac{-e^{-2\pi}}{2\sinh(2\pi)}$$

$$B_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{2\pi} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-e^{2\pi}}{-2\sinh(2\pi)} = \frac{e^{2\pi}}{2\sinh(2\pi)}$$

$$W(x,y) = \left(-\frac{e^{-2\pi}}{2\sinh(2\pi)} e^{2x} + \frac{e^{2\pi}}{2\sinh(2\pi)} e^{-2x}\right)\sin(2y)$$

$$= -\frac{1}{2\sinh(2\pi)}\left[e^{2x-2\pi} - e^{-(2x-2\pi)}\right]\sin(2y)$$

$$-\frac{\cancel{2}\sinh(2x-2\pi)}{\cancel{2}\sinh(2\pi)}\sin(2y) = -\frac{\sinh(2x-2\pi)}{\sinh(2\pi)}\sin(2y)$$

עבור $n \neq 2$ נראה כי רק פתרון האפס מקיים את מד המשוואה

$$\begin{cases} A_n + B_n = 0 \\ A_n e^{n\pi} + B_n e^{-n\pi} = 0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{n\pi} & e^{-n\pi} \end{vmatrix} = e^{-n\pi} - e^{n\pi} \neq 0$$

מאחר וכאשר $n \neq 2$, קיבלנו שתי משוואות הומוגניות הדטרמיננטה שונה מאפס ולכן רק פתרון האפס מקיים את המד הללו.

$$W(x,y) = -\frac{\sinh(2x-2\pi)}{\sinh(2\pi)}\sin(2y)$$

$$V(x,y) = -\frac{\sinh(y-\pi)}{\sinh(\pi)}\sin(x)$$

ת. סופית $\quad u = V + W = -\frac{\sinh(y-\pi)}{\sinh(\pi)}\sin(x) - \frac{\sinh(2x-2\pi)}{\sinh(2\pi)}\sin(2y)$

לאו תיקונים נתת
את התשובה
עם סינוס היפרבולי
במקום קוסינוס היפרבולי.

$$\{(t,s)|\, t = lnr, \quad 0 < s < \pi\}.$$

מכאן נסיק שהמלבן

$$\{(t,s)|\quad ln(a) < t < ln(b), \quad 0 < s < \pi\}$$

הוא תמונת חצי הטבעת

$$\{(x,y)|\quad ln^2(a) < x^2 + y^2 = r^2 < ln^2(b), \quad 0 < arctg(y/x) < \pi\}$$

והפונקציה $W(x,y) = w(½ln(x^2 + y^2), arctg(y/x))$ הרמונית בה כל אימת ש-

$w(t,s)$ הרמונית במלבן.

3. לקבוע האם קיים פתרון לבעיית נוימן הבאה, ואם כן, למצוא את נקודות המכסימום (ולא את ערכי המכסימום) של הפתרון בתחום הנתון:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad x^2 + y^2 < 4.$$
$$\frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = xy\,, \qquad x^2 + y^2 = 4.$$

נא לשים לב שערכי השפה הנתונים הם **לא** של $u(x,y)$ אלא של נגזרתה המכוונת בכיוון הניצב למעגל השפה.

פתרון: כאשר נגזור איבר-איבר לפי r את הטור

$$u(x,y) = \tfrac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta)$$

על היקף העיגול ברדיוס $r = 2$ נקבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n2^{n-1}(c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta) = xy = 4\cos\theta \sin\theta = 2\sin 2\theta$$

ומכך נסיק מיידית שכל מקדמי הקוסינוסים מתאפסים וכן כמעט כל מקדמי הסינוסים פרט למקדם של $sin2\theta$ שעבורו נקבל: $4d_2 = 2$, כלומר $d_2 = ½$. מכאן נובע מייד הפתרון:

$$u(x,y) = ½c_0 + d_2r^2 sin2\theta = ½c_0 + r^2 sin\theta cos\theta = ½c_0 + xy,$$

כאשר c_0 הוא קבוע שרירותי.

לפי עקרון המכסימום (הנוסח החזק), נקודות המכסימום של $u(x,y)$ בעיגול הפתוח $\{(x,y)|\, x^2 + y^2 < 4\}$ אינן יכולות להתקבל באף נקודה פנימית בתחום, כלומר, באף נקודה השייכת לתחום ולכן לבעיית מכסימום זאת אין פתרון, אלא אם כן נדרש למצוא את נקודות המכסימום של u באיחוד של העיגול עם שפתו. במקרה זה, נקודות המכסימום שייכות למעגל ברדיוס 2 סביב הראשית ולפיכך די למצוא את נקודות המכסימום של

$$u(2cos\theta, 2sin\theta) = ½c_0 + 2sin2\theta.$$

המשך של ב.3

נסמן

$0 \le \theta \le 2\pi$

$$g(\theta) = \frac{c_0}{2} + 2\sin(2\theta)$$

$$g'(\theta) = 4\cos(2\theta)$$

$$g'(\theta) = 0 \qquad 4\cos(2\theta) = 0$$

$$\cos(2\theta) = 0$$

$$2\theta_k = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad /:2$$

$$\theta_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

$k = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ ✓

$k = 1 \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$ ✓

$k = 2 \quad \theta = \frac{5\pi}{4}$ ✓

$k = 3 \quad \theta = \frac{7\pi}{4}$ ✓

$$g''(\theta) = -8\sin(2\theta)$$

$$g''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -8\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -8 < 0 \Rightarrow \max\left(\frac{\pi}{4},\ \right)$$

$$g''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -8\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 8 > 0 \Rightarrow \min\left(\frac{3\pi}{4},\ \right)$$

$$g''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -8\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -8 < 0 \Rightarrow \max\left(\frac{5\pi}{4},\ \right)$$

$$g''\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -8\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 8 > 0 \Rightarrow \min\left(\frac{7\pi}{4},\ \right)$$

$\max\left(\frac{\pi}{4}, 2 + \frac{c_0}{2}\right)$

$\min\left(\frac{3\pi}{4}, -2 + \frac{c_0}{2}\right)$

$\max\left(\frac{5\pi}{4}, 2 + \frac{c_0}{2}\right)$

$\min\left(\frac{7\pi}{4}, -2 + \frac{c_0}{2}\right)$

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$$

אורך הקשת ← $l = 2\theta \Rightarrow \boxed{dl = 2d\theta}$ (*)

שימו לב שמסלול שלא התקבלתם [illegible] תנאי הכרחי אך מספיק

$$\oint xy\, dl = \int_0^{2\pi} 2\cos\theta\, 2\sin\theta \cdot 2d\theta = 4\int_0^{2\pi} \sin(2\theta)d\theta = 0$$

$\int_0^{2\pi}(\alpha - 4^2 \sin^2\varphi)2\varphi = 0 \cdot \quad 4\pi\alpha \quad 4\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\varphi)d\varphi = 4\pi(\alpha-2) = 0$

שאלה 4

א. מצא את כל הערכים של α ו- β עבורם קיים פתרון לבעיה:

$$(1)\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \quad , \quad x^2+y^2<4 \\ \vec{n}\cdot\nabla u=\alpha-y^2 \quad , \quad x^2+y^2=4 \\ \int_0^{2\pi} u(2\cos\theta, 2\sin\theta)d\theta=\beta \end{cases}$$

ב. עבור כל ערכי α ו- β עבורם קיים פתרון, מצא פתרון.

פתרון

הבעיה (1) מהווה בעית נוימן למשוואת לפלס בעיגול עם תנאי על הממוצע של הפתרון על שפת העיגול.

נבדוק את התנאי ההכרחי לקיום הפתרון לבעית נוימן ללפלס בעיגול:

$$0=\int_{\partial\Omega}\vec{n}\cdot\nabla u=\int_{\partial\Omega}(\alpha^2-y^2)ds=\int_0^{2\pi}(\alpha-4\sin^2\theta)d\theta$$

$$0=\int_0^{2\pi}(\alpha-2(1-\cos 2\theta)d\theta=2\pi(\alpha-2)$$

לכן, $\alpha=2$ מהווה תנאי הכרחי לקיום פתרון. במידה וקיים פתרון אזי הוא יחיד עד כדי קבוע שרירותי, והשינוי בקבוע השרירותי ישנה את הממוצע של הפתרון על גבי שפת העיגול.

נשים לב כי על סמך משפט הממוצע:

$$2\pi u(0,0)=\int_0^{2\pi}u(2\cos\theta, 2\sin\theta)d\theta=\beta$$

ולכן β גם קובע את ערך הפתרון בראשית, $u(0,0)$.

תוך כדי מתן תשובה לסעיף הבא, נראה כי אכן קיים פתרון עבור $\alpha=2$ ועבור $\beta\in R$ שרירותי.

ב. נסתמך על הנוסחא (11) בדף הנוסחאות עם $a=2$, ולכן

$$u(r,\theta)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}\right)^n(\alpha_n\cos(n\theta)+\beta_n\sin(n\theta))$$

נגזור את הטור איבר-איבר באופן פורמלי, ונקבל כי

$$u_r(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{r}{2}\right)^{n-1}(\alpha_n\cos(n\theta)+\beta_n\sin(n\theta))$$

נזכור כי
$$(\vec{n}\cdot\nabla u)\big|_{\partial\Omega}=u_r(2,\theta)=(\alpha-y^2)\big|_{\substack{y=2\sin 2\theta\\ \alpha=2}}=2\cos 2\theta$$

ולכן, עלינו לדרוש כי

$$2\cos 2\theta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}(\alpha_n\cos(n\theta)+\beta_n\sin(n\theta))$$

על ידי השוואת מקדמים, נקבל כי

$$\alpha_1=0\ ,\ \alpha_2=2\ ,\ \alpha_n=0 \qquad ,\ n=3,4,\ldots$$
$$\beta_n=0 \qquad ,\ n=1,2,3,4,\ldots$$

ולכן
$$u(r,\theta)=\frac{\alpha_0}{2}+\left(\frac{r}{2}\right)^2 2\cos 2\theta$$

על סמך משפט הממוצע, על הפתרון לקיים בנוסף כי

$$\begin{cases} u(0,0)=\dfrac{\beta}{2\pi}\ , \\ \dfrac{1}{2\pi}\beta=u(0,0)=\dfrac{\alpha_0}{2} \end{cases}$$

ולכן, עבור $\alpha=2$, β שרירותי, נקבל את הפתרון:

$$u(r,\theta)=\frac{\beta}{2\pi}+\frac{1}{2}r^2\cos 2\theta=\frac{\beta}{2\pi}+\frac{1}{2}r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$u(x,y)=\frac{\beta}{2\pi}+\frac{1}{2}(x^2-y^2)\ .$$