פתרון בחינה לדוגמא – מבוא לאנליזה 1

1. (א) הסדרה $\{a_n\}$ חיובית ומתכנסת לגבול $L \in \mathbb{R}$. הוכיחו כי $L \geq 0$.

הוכחה: נניח בשלילה ש־$L < 0$. לפי הגדרת הגבול, **בפרט עבור** $\boldsymbol{\varepsilon = -L > 0}$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_0$ טבעי מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$ ובפרט $a_n - L < \varepsilon$, כלומר $a_n < L + \varepsilon = 0$, בסתירה לכך ש־$\{a_n\}$ סדרה חיובית.

(ב) הסדרה $\{b_n\}$ מקיימת $|b_n| \leq a_n$ לכל n טבעי. הוכיחו שיש לה תת־סדרה המתכנסת לגבול סופי.

הוכחה: הסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת לגבול $L \in \mathbb{R}$, לכן לפי משפט היא **חסומה**. לכן קיים $M > 0$ כך ש־$a_n < M$ לכל n טבעי. לכן לכל n טבעי, $|b_n| \leq a_n < M$, כלומר $|b_n| < M$ והסדרה $\{b_n\}$ חסומה. ממשפט בולצאנו־ויירשטראס, יש לה תת־סדרה המתכנסת לגבול סופי.

2. חשבו אחד מהגבולות הבאים:

$$(i) \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) \qquad (ii) \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$$

פתרון:

(i) נסמן $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. נשים לב שלכל n טבעי מתקיים

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{n\ times} \leq a_n \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{n\ times}$$

כלומר $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. כעת, כיוון שמתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$$

נקבל עפ"י כלל הסנדוויץ' כי $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 1}$.

(ii) לפי הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ ואריתמטיקה של גבולות:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\Big[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\Big]^2} = \boldsymbol{\frac{1}{e^2}}$$

3. הפונקציה $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה בכל נקודה ומקיימת $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(א) הוכיחו ש־f מקבלת מינימום גלובלי, כלומר קיימת נקודה x_0 כך ש־$f(x_0) \le f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

הוכחה: נסמן $m = f(0)$. נתון כי $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, לכן קיים $a < 0$ כך שלכל $x < a$ מתקיים $f(x) > m$. כמו כן $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, לכן קיים $b > 0$ כך שלכל $x > b$ מתקיים $f(x) > m$. כעת, f רציפה בכל $\mathbb{R}$ ובפרט רציפה בקטע הסגור $[a, b]$, לכן מהמשפט השני של ויירשטראס היא מקבלת בו מינימום מוחלט (ייתכן שבאחד הקצוות), כלומר יש $x_0 \in [a, b]$ כך שלכל $x \in [a, b]$ מתקיים $f(x_0) \le f(x)$. בפרט $f(x_0) \le f(0) = m$. נשים לב: לכל $x < a$ מתקיים $f(x_0) \le m < f(x) \Leftarrow$ $f(x_0) \le f(x)$. בדומה, לכל $x > b$ מתקיים $f(x_0) \le m < f(x) \Leftarrow f(x_0) \le f(x)$. לכן בסה"כ לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x_0) \le f(x)$, ובנקודה x_0 יש ל־f מינימום גלובלי.

(ב) נתון גם ש־f גזירה פעמיים בכל $\mathbb{R}$ ויש לה מקסימום מקומי בנקודה $x_0 < x_1$.
הוכיחו שיש נקודה c בה $f''(c) = 0$.

הוכחה: f גזירה בנקודות x_0 ו־x_1 (כי היא גזירה פעמיים בכל $\mathbb{R}$), מקבלת מינימום גלובלי (שהוא בפרט גם מקומי) בנקודה x_0 ומקסימום מקומי בנקודה x_1. ממשפט פרמה $f'(x_0) = f'(x_1) = 0$. כיוון ש־f גזירה פעמיים, f' גזירה בקטע $[x_0, x_1]$, וכפי שראינו $f'(x_0) = f'(x_1)$. לכן ממשפט רול קיימת נקודה $c \in (x_0, x_1)$ שבה $f''(c) = 0$, כדרוש.

4. נתונה הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{2x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

(א) עבור אילו ערכי a הפונקציה רציפה בנקודה $x = 0$?

פתרון: $f(x)$ רציפה בנקודה $x = 0 \iff \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. נחשב את הגבול:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{2x} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+x^2} = \frac{0}{1+0^2} = 0$$

לכן f רציפה ב־$x = 0$ אם ורק אם $f(0) = 0$, כלומר $\boldsymbol{a = 0}$.

(ב) עבור אילו ערכי a הפונקציה גזירה בנקודה $x = 0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלו?

פתרון: אם f גזירה בנקודה $x = 0$ אז היא בפרט רציפה בה, ולכן $a = 0$ הוא המועמד היחיד.
נבדוק אם במקרה זה הפונקציה גזירה ב־$x = 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+\Delta x^2)}{2\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(1+\Delta x^2)}{2\Delta x^2} \underset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{2\Delta x}{1+\Delta x^2}}{4\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{2+2\Delta x^2} = \frac{1}{2}$$

קיבלנו שהגבול המגדיר את $f'(0)$ קיים וסופי, לכן עבור $\boldsymbol{a = 0}$ הפונקציה גזירה בנקודה $x = 0$ ואז $\boldsymbol{f'(0) = \frac{1}{2}}$.