## פתרון תרגיל 11 למורים :

שאלה 1:

א. $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$ נשים בעמודות ונדרג : $\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&2\\0&1&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$ קיבלנו

שלכל משתנה יש איבר מוביל ולכן הוקטורים בת"ל ולפי השלישי חינם הם בסיס ל V.

ב. $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ נשים בעמודות ונדרג :

$\begin{pmatrix}1&2&1&1\\1&0&-1&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-2&-2&0\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-2&-2&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ - קיבלנו שאין איבר מוביל

במשתנה השלישי ולכן הוא תלוי והשאר בתל לכן ניקח את העמודות המקוריות : $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ והן

בסיס ל V לפי השלישי חינם.

ג. $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ ניתן לראות כי הוקטורים בת"ל ולכן נותר להוסיף להן וקטור בת"ל ע"מ שיהיו בסיס. לפי ניחוש

ניתן להוסיף את אחד הוקטורים הבאים : או $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ או $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ או $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

ד. $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$ נשים בעמודות ונדרג :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&a\\-1&0&1&b\\2&2&0&c\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&a\\0&2&2&b+a\\0&-2&-2&c-2a\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&a\\0&2&2&b+a\\0&0&0&c-a+b\end{array}\right)$$

קיבלנו ש הקבוצה תלויה – הוקטור השלישי תלוי בשניים האחרים ואותו ניתן להוריד.
מאידך קיבלנו שהתנאי הוא $c-a+b=0$ ולכן נבחר וקטור שלא מקיים את התנאי הנ"ל והוא ישלים

לנו לבסיס ל V לדוגמה : $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ או כל וקטור אחר שלא מקיים את התנאי ישלים לבסיס.

## שאלה 2

יש למצוא בסיסים עבור תתי המרחבים של המטריצה הבאה: $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&9&9&9\end{bmatrix}$.

**מרחב השורה:** $\boldsymbol{R(\mathrm{A})=span\left\{\begin{matrix}(1,2,3,4)\\(5,6,7,8)\\(9,9,9,9)\end{matrix}\right\}\subseteq \mathbb{R}^4}$ :

מרחב השורות לא נפגע ע"י פעולות הדירוג מכיוון שהוא סגור לפעולות חיבור וכפל בסקלר.

לכן נדרג ונקבל: $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&9&9&9\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3-9R_1]{R_2-5R_1}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&-4&-8&-12\\0&-9&-18&-27\end{bmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{9}R_3]{-\frac{1}{4}R_2}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&1&2&3\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-R_2}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$.

ניתן לראות כי השורה האחרונה ת"ל באחרות ולכן בסיס למרחב השורה הוא: $\left\{\begin{matrix}(1,2,3,4)\\(0,1,2,3)\end{matrix}\right\}$.

**מרחב העמודות:** $\boldsymbol{C(\mathrm{A})=span\left\{\vec{C}_1,.....,\vec{C}_n\right\}}$ :

מהדירוג הקודם ניתן לראות כי העמודות השלישית והרביעית ת"ל בעמודות הראשונה והשנייה (אין בהן ציר).

לכן הבסיס של המטריצה A הוא: $C(\mathrm{A})=\left\{\begin{bmatrix}1\\5\\9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\6\\9\end{bmatrix}\right\}$. שימו לב שלקחנו את העמודות המקוריות ולא את העמודות שאחרי הדרוג היות והדרוג משנה את מרחב העמודות ולכן אנחנו חייבים להשתמש במקוריות !!!!!

**מרחב האפס:** $\boldsymbol{N(\mathrm{A})=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^4\,\middle|\,A\vec{x}=0\right\}}$ :

יש להגיע לצורה הקנונית תחילה: $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1-2R_2}\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$.

נניח כי: $\vec{x}=\{x,y,z,w\}$ ונסמן: $z=k\ ,\ w=t$ ונקבל: $\begin{cases}x=k+2t\\y=-2k-3t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-k-2t=0\\y+2k+3t=0\end{cases}$.

לכן: $N(A)=\left\{\begin{pmatrix}k+2t\\-2k-3t\\k\\t\end{pmatrix}\right\}=\left\{k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

---

נסתכל על B :

$$B=\begin{pmatrix}1&1&3\\-1&3&1\\1&0&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$ אחרי דרוג :

$$\begin{pmatrix}1&1&3\\-1&3&1\\1&0&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&3\\0&4&4\\0&-1&-1\\0&2&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

מרחב השורות : ממימד 2 ובסיסו : $(1,1,3)(0,1,1)$

מרחב העמודות –מימד 2 ובסיסו : לוקחים עמודות מקוריות בלבד : $(1,-1,1,-1)(1,3,0,1)$

לפיכך, מרחב האפס חייב להיות ממימד 1 :
$$\begin{aligned}&y+t=0,\ y=-t\\&x-t+3t=0\\&x=-2t\end{aligned}$$
ולכן :
$$\begin{pmatrix}-2t\\-t\\t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

לכן הבסיס למרחב האפס הוא $\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ ומימדו 1.

3. תהי $A \in \Re^{n\times n}$. הוכיחו או הפריכו :

א. אם למערכת $Ax=b$ קיים פתרון יחיד אזי: $R(A)=\Re^n$.
נכון! אם למערכת יש פתרון יחיד ז"א שהמטריצה הפיכה לפי השקולים ואז השורות הן בת"ל. כלומר יש לנו n שורות בת"ל ולכן הן בסיס למרחב $\Re^n$ לפי משפט השלישי חינם כלומר $R(A)=\Re^n$.

ב. נניח כי: $rank(A)<n$ אזי שלכל $x\neq 0$ מתקיים: $Ax\neq 0$.
לא נכון! אם דרגת המטריצה $rank(A)<n$ ז"א שהמטריצה לא הפיכה ולפי משפט השקולים קיים פתרון לא טריוויאלי למערכת ההומוגנית $Ax=0$ במילים אחרות קיימים $x\neq 0$ כך ש $Ax=0$ !!

ג. נניח שמטריצה $B\in\Re^{n\times n}$ מתקבלת מ-A אחרי מס' פעולות שורה. אזי :
i) מרחב השורות של B,A שווה.
נכון ! דירוג הוא פעולות צי"ל שמשמר את מרחב השורות.

ii) מרחב העמודות שלהן שווה.
לא נכון! דוגמה נגדית : לפני דרוג : $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \Leftarrow C(A)=span\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$,
אחרי דרוג : $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} \Leftarrow C(B)=span\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

iii) מרחב האפס שלהן שווה.
נכון! מרחב האפס הוא הניצב למרחב השורות ואם מרחב השורות נשמר- גם מרחב האפס נשמר.