תרגיל בית 9 – טופולוגיה

שאלה 1

נתבונן בשלושה תתי מרחבים של $\mathbb{R}^2$:

$$X=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}$$

$$Y=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-2)^2+y^2=1\right\}$$

$$Z=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=1\right\}$$

ראינו בכיתה ש- Z אינו הומיאומורפי ל- X. האם Y הומיאומורפי ל- X או ל- Z?
הוכיחו את תשובתכם!

שאלה 2

הוכיחו כי $\mathbb{R}$ אינו הומיאומורפי ל $\mathbb{R}^n$ עבור $n>1$.

שאלה 3 (ממבחן)

יהי $A\subseteq\mathbb{R}$. הראו שאם A צפוף ב $\mathbb{R}$ ו $A\neq\mathbb{R}$ אז A איננו קשיר.

שאלה 4

א. הראו שלכל טופולוגיה יש בסיס.
ב. הראו שאם B_1 הוא אוסף של קבוצות פתוחות במרחב (X,τ), המכיל בסיס B_2 ל- τ, אזי B_1 הוא בעצמו בסיס ל- τ.
ג. יהיו τ_1,τ_2 טופולוגיות על X. יהי B_1 בסיס ל- (X,τ_1). אזי: $\tau_1\subseteq\tau_2$ אם ורק אם $B_1\subseteq\tau_2$.

שאלה 5

א. יהיו X,Y מ"ט. יהיו $F\subseteq X, G\subseteq Y$ סגורות. הוכיחו כי הקבוצה $F\times G$ סגורה ב- $X\times Y$.
ב. יהיו X,Y מ"ט, $A\subseteq X, B\subseteq Y$. הוכיחו כי $\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}$ (או בסימון חלופי: $cl(A\times B)=cl(A)\times cl(B)$).

<u>שאלה 6</u>

א. יהי X מ"ט. נגדיר את האלכסון של $X\times X$ להיות $\Delta=\{(x,x):x\in X\}$.

הראו שאם Δ סגור ב- $X\times X$ אזי X הוא האוסדורף. (שימו לב שאת הכיוון השני של הטענה הזו הוכחנו בתרגול.)

ב. מצאו דוגמה למרחב טופולוגי (X,τ) עם קבוצה צפופה $A\subseteq X$ ושתי פונקציות <u>רציפות</u> <u>שונות</u> $f,g:X\to X$ המתלכדות על A.

<u>שאלה 7</u>

יהי X מ"ט ויהיו $A,B\subseteq X$. נתון כי A קשיר, B סגוחה (סגורה ופתוחה) וכן $A\cap B\neq\varnothing$. הוכיחו כי $A\subseteq B$.

<u>שאלה 8</u>

יהי X מ"ט ותהיינה $A,B\subseteq X$ תתי קבוצות סגורות. נניח שתתי המרחבים $A\cup B$ ו- $A\cap B$ קשירים. הוכיחו ש A ו- B קשירים. הדרכה: מ"ל ש A קשיר שכן ההוכחה ש- B קשיר סימטרית. הניחו בשלילה ש $A=U\cup V$ כאשר U,V סגורות...

בהצלחה!