תרגיל בית 9 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1 (חימום). תהי G חבורה ותהי $H \lhd G$ תת־חבורה נורמלית. הפריכו את הטענות השגויות הבאות:

א. אם G/H ציקלית ולא טריוויאלית, אז G אבלית.

ב. אם G/H סופית ולא טריוויאלית, אז G סופית.

שאלה 2 (חימום). מצאו את הסימן של התמורה

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 2n & 1 \end{pmatrix} \in S_{2n}$$

ושל התמורה $\tau \in S_{2n}$ המוגדרת לפי $\tau(i) = 2n + 1 - i$.

שאלה 3. תהי G חבורה ותהיינה H, K תת־חבורות נורמליות המקיימות $H \cap K = \{e\}$. הוכיחו כי G איזומורפית לתת־חבורה של $G/K \times G/H$.

שאלה 4. בתרגיל הזה נראה שוב שאי אפשר לומר ששתי תמורות הן "צמודות סתם" מבלי לומר באיזו חבורה עובדים.

א. מצאו את מחלקת הצמידות של $(132) \in A_4$.

ב. תנו דוגמה לשתי תמורות שאינן צמודות ב-A_4, אבל כן צמודות ב-S_4. הוכיחו שהן גם צמודות ב-A_5. רמז: הביטו מעלה.

ג. הוכיחו שאם יש זוג תמורות שאינן צמודות ב-A_n, אך כן צמודות ב-S_n, אז הן גם צמודות ב-A_{n+2}.

שאלה 5. יהי $n \geq 3$. הוכיחו כי תת־החבורה היחידה של S_n מאינדקס 2 היא A_n.
הדרכה: הניחו כי $H \leq S_n$ היא מאינדקס 2. הזכרו למה H תת־חבורה נורמלית ולמה לכל $\sigma \in S_n$ מתקיים $\sigma^2 \in H$. הוכיחו כי H מכילה את כל המחזורים מאורך 3, וסיימו לפי תרגיל מהכיתה.

שאלה 6. תהיינה $G_1, \ldots, G_n$ חבורות ותהיינה $H_1, \ldots, H_n$ תת־חבורות נורמליות שלהן, בהתאמה (כלומר $H_i \lhd G_i$ לכל i).

א. הוכיחו כי $H_1 \times \cdots \times H_n \lhd G_1 \times \cdots \times G_n$.

ב. הוכיחו כי $(G_1 \times \cdots \times G_n) \,/\, (H_1 \times \cdots \times H_n) \cong G_1/H_1 \times \cdots \times G_n/H_n$.

שאלה 7. נראה שאיזומורפיות בתת־חבורות נורמליות ובחבורות המנה ביחד עדין לא גורר איזומורפיות בחבורה "למעלה".

מצאו חבורות G_1, G_2 ותת־חבורות נורמליות שלהן $H_1 \lhd G_1$ ו-$H_2 \lhd G_2$ כך שגם $H_1 \cong H_2$ וגם $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$, אבל G_1 לא איזומורפית ל-G_2.

נסו למצוא דוגמאות מסוגים שונים: נסו כאשר G_1 אבלית ואילו G_2 לא אבלית (אפשר לעשות זאת למשל כאשר שתיהן מסדר 6 או 8), או כאשר שתיהן חבורות-p אבליות.

שאלה 8. נתבונן בחבורה $G = {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$.

א. הוכיחו שהסדר של כל איבר ב-G הוא סופי, אבל שישנם איברים בחבורה מסדר גדול כרצוננו.

ב. יהיו $x_1, x_2 \in G$. הראו שתת־החבורה $H = \langle x_1, x_2 \rangle$ היא ציקלית וסופית. רמז: הציגו את x_1, x_2 כמחלקות שמאליות, ואז נסו להבין כיצד נראה איבר כלשהו ב-H.

ג. מצאו קבוצת איברים $S \subseteq G$ כך שתת־החבורה $K = \langle S \rangle$ היא אינסופית וגם $K \neq G$. רמז: למה S חייבת להיות אינסופית?

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה שלחו לנו את הפתרון שלהן.

שאלה 9. תהי G חבורה. נקרא לתת־חבורה של G נאותה אם היא מוכלת ממש ב-G.

א. הוכיחו ש-G אינה איחוד של שתי תת־חבורות נאותות. כלומר שאם $G = H \cup K$, אז $G = H$ או $G = K$.

ב. תנו דוגמה לחבורה מסדר 4 שהיא איחוד של שלוש תת־חבורות נאותות שלה.

ג. מעתה נניח כי G היא איחוד של שלוש תת־חבורות נאותות, $G = H_1 \cup H_2 \cup H_3$. הוכיחו כי חיתוך של כל שתיים מתת־החבורות שווה לחיתוך שלושתן $H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

ד. הוכיחו כי לכל $x \in G$ מתקיים $x^2 \in H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

ה. הסיקו כי $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \lhd G$.

ו. הוכיחו שהאינדקס של החיתוך ב-G הוא 4. הראו שחבורת המנה ביחס לחיתוך איזומורפית לדוגמה שנתתם בסעיף השני.

בהצלחה!