תרגיל 6 - פתרון.

שאלה 1.

(1) תהי $c$ נקודה ב- $(a,b)$ שבה $f$ רציפה ו- $f(c)\neq 0$.

$f$ אי שלילית בקטע $[a,b]$, ולכן נסיק כי: $0<f(c)$.

$f$ רציפה ב- $c$ ולכן עבור $\varepsilon=\frac{f(c)}{2}$ קיים $0<\delta_1$ כך שלכל $x\in[a,b]$ המקיים: $|x-c|<\delta_1$ מתקיים $|f(x)-f(c)|<\frac{f(c)}{2} \Leftarrow f(x)>\frac{f(c)}{2}$.

נבחר: $0<\delta<\min\{\delta_1, c-a, b-c\}$

$$\int_a^b f(x)\,dx \underset{\text{אדיטיביות}}{=} \int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,dx + \int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx \geq$$

$$\underset{\text{מונוטוניות}}{\geq} \int_a^{c-\delta} 0\,dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2}\,dx + \int_{c+\delta}^{b} 0\,dx = \frac{f(c)}{2}\cdot 2\delta$$

$$= f(c)\cdot\delta > 0$$

(2) לכן אין לוותר על דרישת הרציפות ב- $c$.

לדוגמא: $f(x)=\begin{cases}0 & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$ בקטע $[0,2]$

$f$ הוא אי שלילית בקטע $[0,2]$ וכן $f(1)=1>0$,

אולם $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 0\,dx = 0$

כמעט $f(x)=0$ לכל $x$ ב- $[0,2]$.

(3) לכל $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ מתקיים: $\sin x+\cos x>0$.

כמו כן, $\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2} = \sin 0+\cos 0 = 1>0$.

לכן בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$: $\sin x+\cos x>0$, ולכן הפונקציה:

$f(x)=\frac{1}{\sin x+\cos x}$ רציפה בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$ - כמנה של פונקציות רציפות

שהמכנה כאן אינו מתאפס, ולכן: $f$ אינטגרבילית בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$.

$f$ רציפה בקטע הסגור $[0,\frac{\pi}{2}]$ ולכן, לפי משפט ויירשטראס,

מקבלת שם מקסימום ומינימום. בנוסף, $f$ גזירה בקטע, ו-

$$f'(x) = \frac{-\cos x + \sin x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

ומ- $[0,\frac{\pi}{2}]$ מתקיים $f'(x)=0$ רק עבור $x=\frac{\pi}{4}$.

לפיכך, המינימום והמקסימום מתקבלים או ב- $\frac{\pi}{4}$ או בקצוות הקטע.

$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 1$.

לכן, לכל $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$ מתקיים $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq f(x) \leq 1$,

ועל סמך המונוטוניות נקבל:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$$

(4) טענת עזר: תהיינה $h, g$ פונ' אינטגרביליות בקטע $[a,b]$

המקיימות $g(x) \geq h(x)$ לכל $x$ בקטע.

אם קיימת נקודה $c$ בקטע $(a,b)$ כך ש- $h$ ו- $g$ רציפות

ב- $c$, ו- $g(c) \neq h(c)$ אזי $\int_a^b g(x)\,dx > \int_a^b h(x)\,dx$.

הוכחת טענת העזר: נגדיר, $f(x) := g(x) - h(x)$ בקטע $[a,b]$.

$f$ מקיימת את הדרישות של סעיף (4) בשאלה 2 (ובכלל!)

ולכן מתקיים: $\int_a^b f(x)\,dx > 0$, כלומר: $\int_a^b (g(x) - h(x))dx > 0$

ומתכונות הלינאריות של האינטגרל נקבל:

$$\int_a^b g(x)\,dx > \int_a^b h(x)\,dx$$ - כנדרש.

כעת, לפי סעיף (3), לכל $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$ מתקיים:

$$f(x) := \frac{1}{\sin x + \cos x} \leq 1 ,$$

$$f(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 ,$$

וכן $f$ רציפה בקטע. לכן - לפי טענת העזר - מתקיים:

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx < \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$$ כנדרש.