מד"ר - תרגול 5

16 באוגוסט 2011

דוגמאות נוספות למשפט הקיום והיחידות

תזכורת

1. ראינו שלמשפט הקיום והיחידות יש אופי מקומי, כלומר הוא מבטיח פתרון יחיד בסביבה קטנה של הנקודה.
2. ראינו כי המשפט נותן תנאי מספיק לקיום פתרון יחיד אבל לא הכרחי.
3. רציפות של f בלבד היא תנאי מספיק שקיים פתרון למד"ר אבל לאו דווקא יחיד.

דוגמה 1

קבע האם קיים פתרון יחיד למשוואה

$$y^{'}=y^{x^2+1}$$

פתרון

נסמן $f\left(x,\,y\right)=y^{x^2+1}$, לא קל במקרה זה לפתור את המד"ר, בדקו!
אבל משפט הקיום והיחידות יכול לקבוע האם בכלל יש פתרון.
ברור כי f רציפה ובנוסף $f_y^{'}\left(x,\,y\right)=\left(x^2+1\right)y^{x^2}$ שגם רציפה בכל המישור ולכן מתקיימים תנאי המשפט של קיום ויחידות.

תזכורת למשפט

נתונה משוואה

$$y^{'}=f\left(x,\,y\right)$$

אם f רציפה ו-$f_y^{'}$ רציפה בסביבת הנקודה $\left(x_0,\,y_0\right)$ אז יש פתרון יחיד בסביבה זו.

דוגמה 2

נתונה המשוואה

$$\begin{aligned} y^{'} &= y^{\frac{1}{3}} \\ y\left(0\right) &= 0 \end{aligned}$$

קבע האם יש פתרון יחיד למשוואה.

פתרון

נשים לב כי

$$f\left(x,\,y\right)=y^{\frac{1}{3}}$$

וברור שהיא רציפה אך הנגזרת אינה רציפה ב$y=0$ כי

$$f_{y}=\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$$

לכן התנאי השני למשפט לא מתקיים.
נעשה הפרדת משתנים:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= y^{\frac{1}{3}}\\ \frac{dy}{y^{\frac{1}{3}}} &= dx\\ \frac{y^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} &= x\\ y^{\frac{2}{3}} &= \frac{2}{3}\left(x-c\right)\end{aligned}$$

נזכיר שעבור $y=0$ יש לבדוק פתרון סינגולרי.
כדי לקבל את y בצורה מפורשת נרשום

$$y=\pm\left[\frac{2}{3}\left(x-c\right)\right]^{\frac{3}{2}}$$

כדי שיתקיים תחום ההגדרה נדרוש $x\geq c$.
נגדיר את y_{1} באופן הבא (עבור הסימן החיובי)

$$y_{1}=\begin{cases}0 & x\leq c\\ \frac{2}{3}\left(x-c\right)^{\frac{3}{2}} & x>c\end{cases}$$

ובאופן דומה עבור הסימן השלילי את y_{2}.
y_{1} היא פונק' רציפה וגזירה ושם גם הנגזרת רציפה. (כך גם עבור y_{2}).

מסקנה

הפונק' y_{1} וגם הפונק' y_{2} רציפות ובאופן דומה הנגזרת רציפה, ולכן כל אחת מהפונ-קציות מרשה פתרון לבעיית ההתחלה שלנו, ז"א במקרה זה הפתרון אינו יחיד.

דוגמה 3

נתונה המשוואה:

$$\begin{aligned}y^{'} &= 2e^{x}-y\\ y\left(0\right) &= 1\end{aligned}$$

מצא פתרון כללי למשוואה.

פתרון

נסמן $f\left(x,\,y\right)=2e^{x}-y$. ברור ש$f$ רציפה וגם $f_{y}^{'}$ רציפה.
ע"י ניחוש קל לראות ש$y=e^{x}$ מקיים את המשוואה וממשפט הקיום והיחידות ניתן להסיק שהפתרון הנ"ל הוא הפתרון הכללי.

תלות לינארית בין פונקציות

קבוצה של n פונקציות המוגדרות בקטע I נקראות קבוצה תלויה לינארית אם קיים צירוף לינארי לא טריוויאלי של פהונק' שמתאפס בכל הקטע, דהיינו

$$\sum c_{i}f_{i}\left(x\right)=0$$

כך שלא כל הcים שווים 0.

דוגמה 4

נתונות $f_{1},\,f_{2}$ פונק' ת"ל בקטע, הראה שגם $g_{1},\,g_{2}$ ת"ל כאשר

$$\begin{aligned}g_{1} & = f_{1}+f_{2}\\ g_{2} & = f_{1}-f_{2}\end{aligned}$$

פתרון

נחפש פתרון

$$\alpha g_{1}+\beta g_{2}=0$$

כאשר $\alpha\neq0$ או $\beta\neq0$.

$$\begin{aligned}\alpha g_{1}+\beta g_{2} & = \alpha\left(f_{1}+f_{2}\right)+\beta\left(f_{1}-f_{2}\right)\\ & = \left(\alpha+\beta\right)f_{1}+\left(\alpha-\beta\right)f_{2}=0\end{aligned}$$

נסמן

$$\begin{aligned}\alpha+\beta & = c\\ \alpha-\beta & = d\end{aligned}$$

אם $d=0$ אז $c\neq0$:

$$\begin{aligned}d & = 0\\ \alpha-\beta & = 0\\ \alpha & = \beta\\ c & = 2\alpha\neq0\end{aligned}$$

וורונסקיאן של פונקציה

תהיינה $\{f_i(x)\}_{i=1}^{n}$ סדרת פונק' בעלות $n-1$ נגזרות בקטע I.
הוורונסקיאן של n הפונקציות הוא

$$W(x)=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1^{'} & f_2^{'} & \dots & f_n^{'} \\ & \vdots & \vdots & \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

אם הפונקציות ת"ל אז $W(x)=0$ בכל הקטע.

הערה

אם $W(x)\neq 0$ אז הפונק' בת"ל. ההיפך לא בהכרח נכון.

דוגמה 5

התבונן בפונק'

$$\begin{aligned} f_1 &= x^2 \\ f_2 &= x\cdot|x| \end{aligned}$$

הוכח:

1. שתי הפונק' גזירות בכל הקטע $[-1,1]$
2. הוורונסקיאן שלהן מתאפס בכל הקטע $[-1,1]$
3. שתי הפונק' בת"ל בקטע $[-1,1]$
4. הפונק' תלויות לינארית בקטע $[0,1]$

פתרון

1. f_1 גזירה בבירור.
את f_2 נכתוב באופן הבא:

$$f_2(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$$

אם נבדוק לפי ההגדרה נקבל כי $f_2^{'}(0)=0$ ולכן f_2 גם גזירה.

2. נחלק למקרים. אם $x\geq 0$:

$$W=\begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 2x \end{vmatrix}=0$$

אם $x<0$:

$$W=\begin{vmatrix} x^2 & -x^2 \\ 2x & -2x \end{vmatrix}=0$$

3. צריך להראות ששתי הפונק' בת"ל. נסתכל על הצירוף

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0$$

נחלק לשני תחומים, עבור הקטע $[0,1]$ נקבל:

$$\begin{aligned} c_1 x^2 + c_2 x^2 &= 0 \\ c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

עבור הקטע $[-1,0]$ נקבל:

$$\begin{aligned} c_1 x^2 - c_2 x^2 &= 0 \\ c_1 - c_2 &= 0 \end{aligned}$$

לכן מתקיים

$$c_1 = c_2 = 0$$

לא קיים צירוף לינארי לא טריויאלי לכן הפונק' בת"ל.

4. בקטע $[0,1]$ הפונק' מתלכדות ולכן בטח שהן ת"ל.

מרחב הפתרונות של משוואה לינארית הומוגנית

הפתרונות של משוואה לינארית הומוגנית (בעלת מקדמים רציפים) הם בת"ל $\Longleftrightarrow$ הוורונסקיאן שלהם שונה מ-0 בכל הקטע.

דוגמה 6

האם קיימת משוואה מהצורה

$$y''' + P_2(x)\, y'' + P_1(x)\, y' + P_0(x)\, y = 0$$

בעלת מקדמים רציפים בקטע $(-1,1)$ כך הפונק' x, x^2, x^3 הן פתרונותיה.

פתרון

נתבונן ב-W:

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} \\ &= x\left(12x^2 - 6x^2\right) - \left(6x^3 - 2x^3\right) \\ &= 6x^3 - 4x^3 = 2x^3 \end{aligned}$$

נשים לב שבנק' $x=0$ מתקיים $W=0$ ולכן לא יכול להיות שהפונק' הינה פתרון של המשוואה אחרת בכל הקטע W היה שונה מ-0.

הערה

במקרה שלנו אכן קב' הפתרונות היא בת"ל ולכן מתחייב שאינן פתרונות של המשוואה. נוסיף שבמקרה שלא טריוויאלי שקב' הפתרונות בת"ל, יש לבדוק זאת!

דוגמה 7

הוכח כי $W(x)$ של שני הפתרונות של המשוואה

$$y'' + P_1(x)\, y' + P_0(x)\, y = 0$$

מקיים את המשוואה

$$W'(x) + P_1(x)\, W(x) = 0$$

פתרון

נסמן את הפתרונות y_1, y_2. נסתכל על הוורונסקיאן:

$$\begin{aligned}
W(x) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\
&= y_1 y_2' - y_1' y_2 \\
W'(x) &= y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' \\
&= y_1 y_2'' - y_1'' y_2
\end{aligned}$$

נציב במשוואה:

$$\begin{aligned}
y_1 y_2'' - y_1'' y_2 + P_1 y_1 y_2' - P_1 y_1' y_2 &= y_1 \left(y_2'' - P_1 y_2' \right) - y_2 \left(y_1'' + P_1 y_1' \right) \\
&= y_1 \left(y_2'' - P_1 y_2' \right) - y_2 \left(y_1'' + P_1 y_1' \right) + P_0 y_1 y_2 - P_0 y_1 y_2 \\
&= y_1 \left(y_2'' - P_1 y_2' + P_0 y_2 \right) - y_2 \left(y_1'' + P_1 y_1' + P_0 y_1 \right) \\
&= y_1 \cdot 0 - y_2 \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

משוואות הומוגניות לינאריות מסדר 2 עם מקדמים קבועים

נתונה המשוואה הבאה:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

נציב $y = e^{\lambda x}$ ונקבל

$$\left(a\lambda^2 + b\lambda + c \right) e^{\lambda x} = 0$$

המשוואה תתאפס כאשר

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

ישנן 3 אפשרויות לפתרון:

1. אם $\Delta > 0$ אז יש 2 שורשים ממשיים שונים ואז הפתרון הכללי הוא

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

2. אם $\Delta = 0$ אז יש שורש ממשי אחד עם ריבוי 2 ואז הפתרון הכללי הוא

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_1 x e^{\lambda x}$$

3. אם $\Delta < 0$ השורשים מרוכבים, $\lambda_{1,\,2} = \alpha \pm i\beta$ ואז הפתרון הכללי הוא:

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta x)} \\ &= e^{\alpha x}\left(c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}\right) \end{aligned}$$

ולפי משפט הקיום והיחידות זה הפתרון היחיד.

דוגמה 8

פתור את המשוואות הבאות:

$$y^{''} + 6y^{'} + 25y = 0$$

פתרון

מספיק לפתור את המשוואה

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 6\lambda + 25 &= 0 \\ \lambda_{1,\,2} &= -3 \pm 4i \end{aligned}$$

ולכן הפתרון הוא

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{(-3+4i)x} + c_2 e^{(-3-4i)x} \\ &= e^{-3x}\left(c_1 e^{4ix} + c_2 e^{-4ix}\right) \end{aligned}$$

הערה

במקרה של משוואה לא הומגנית נפתור את המשוואה ההומוגנית ונמצא פתרון פרטי.

דוגמה 9

$$y^{''} + 2y^{'} - 8y = e^{3x}$$

פתרון

נחלק לשני חלקים.
תחילה, נמצא פתרון למשוואה ההומוגנית:

$$y^{''}+2y^{'}-8y=0$$

נפתור את המשוואה

$$\begin{aligned}\lambda^2+2\lambda-8 &= 0\\ \lambda &= 2,\,-4\end{aligned}$$

ואז הפתרון ההומוגני הוא

$$y_g=c_1e^{2x}+c_1e^{-4x}$$

כעת נמצא פתרון פרטי. הפתרון הפרטי הוא מהצורה

$$y_p = a\cdot e^{3x}$$

נציב במשוואה:

$$\begin{aligned}9ae^{3x}+6ae^{3x}-8ae^{3x} &= e^{3x}\\ 7ae^{3x} &= e^{3x}\\ a &= \frac{1}{7}\end{aligned}$$

לכן

$$y_p=\frac{1}{7}e^{3x}$$

לכן הפתרון הכללי של המד"ר הוא

$$y=y_g+y_p=c_1e^{2x}+c_2e^{-4x}+\frac{1}{7}e^{3x}$$

דוגמה 10

$$y^{''}+y^{'}=2x^2$$

פתרון

הפתרון ההומוגני:

$$\begin{aligned}\lambda^2+\lambda &= 0\\ \lambda &= 0,\,-1\\ y_g &= c_1+c_2e^{x}\end{aligned}$$

כיוון ש0 הוא שורש של הפולינום האופייני ננחש פתרון כפולינום מדרגה 3:

$$y_p = ax^3 + bx^2 + cx$$

נציב במשוואה:

$$\begin{aligned} 6ax + 2b + 3ax^2 + bx + c &= 2x^2 \\ 3ax^2 + (6a+b)\,x + (2b+c) &= 2x^2 \end{aligned}$$

נעשה השוואת מקדמים ונקבל:

$$\begin{aligned} 3a &= 2 \\ 6a + b &= 0 \\ 2b + c &= 0 \end{aligned}$$

נפתור ונקבל

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{3} \\ b &= -2 \\ c &= 4 \end{aligned}$$

ולכן הפתרון הפרטי הוא

$$y_p = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 4x$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{aligned} y &= y_g + y_p \\ &= c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \end{aligned}$$

דוגמה 11

פתור:

$$y^{''} + 2y^{'} + y = \sin(2x)$$

פתרון

עבור פתרון הומוגני:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\lambda + 1 &= 0 \\ \lambda &= -1 \end{aligned}$$

לכן

$$y_g = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

עבור פתרון פרטי ננחש

$$y=a\sin\left(2x\right)+b\cos\left(2x\right)$$

נציב במשוואה:

$$\begin{aligned}-4a\sin\left(2x\right)-4b\cos\left(2x\right)+4a\cos\left(2x\right)-4b\sin\left(2x\right)+a\sin\left(2x\right)+b\cos\left(2x\right) &= \sin\left(2x\right)\\ \sin\left(2x\right)\left(-4b-3a\right)+\cos\left(2x\right)\left(4a-3b\right) &= \sin\left(2x\right)\end{aligned}$$

ואז נקבל:

$$\begin{aligned}-4b-3a &= 1\\ 4a-3b &= 0\end{aligned}$$

נפתור ונקבל:

$$\begin{aligned}a &= -\frac{4}{25}\\ b &= -\frac{3}{25}\end{aligned}$$

לכן הפתרון הפרטי הוא

$$y_p=-\frac{4}{25}\sin\left(2x\right)-\frac{3}{25}\cos\left(2x\right)$$

והפתרון הכללי הוא סכום הפתרון ההומוגני והפרטי.