מועד א' ־ לינארית 2 מדעי המחשב (89113)

10.7.2018, כ"ז תמוז תשע"ח

מרצים: ד"ר עדינה היילברון ומר אחיה בר־און
מתרגלים: מר עוזי חרוש וגב' פולינה לוצקר
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- ללא חומר עזר, פרט למחשבון פשוט.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.
- ניקוד מקסימאלי 105. ציון מעל 100 יעוגל ל 100.
- הדפים האחרונים מכילים הגדרות מהקורס.

.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

חלק א ־ שאלות נכון/לא נכון. סמנו את התשובה הנכונה, לא נדרש נימוק בחלק זה.
כל שאלה בחלק זה שווה 5 נקודות.

1. יהיו V,W מ"ו מעל הממשיים אזי קיימת ה"ל $T:V\to W$ חד־חד ערכית.

   (א) נכון.

   (ב) לא נכון.

   i. פתרון: לא נכון.

2. כל שתי מטריצות $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכות מקיימות כי הן דומות זו לזו.

   (א) נכון.

   (ב) לא נכון.

   i. פתרון: לא נכון.

3. יהא V מ"ו. אז כל מטריצת מעבר $[I]_{B'}^{B}$ בין כל שני בסיסים B,B' היא הפיכה.

   (א) נכון.

   (ב) לא נכון.

   i. פתרון: נכון.

4. יהא V מרחב מכפלה פנימית. אז לכל ת"מ $W\le V$ מתקיים כי $\dim W\le\dim W^{\perp}$

   (א) נכון.

   (ב) לא נכון.

   i. פתרון: לא נכון.

5. יהיו $T:V\to W,\ S:W\to U$ שתי ה"ל. אזי $\ker(T)\subseteq\ker(S\circ T)$

   (א) נכון.

   (ב) לא נכון.

   i. פתרון: נכון.

חלק ב ־ שאלות חישוביות ־ רשמו תשובה סופית בלבד (בחלק זה 2 שאלות).
את התשובות הסופיות רשמו בעמוד הבא שמיועד לחלק ב.
כל שאלה בחלק זה שווה 20 נקודות.

1. נגדיר $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ ע"י

$$T(a+bx+cx^2)=(-3a+4b+c)+(-2a+2b)\,x+(2a-3b-c)\,x^2$$

לכל $a+bx+cx^2\in\mathbb{R}_2[x]$.

(א) מצאו מטריצה A שמייצגת את T. כיתבו באיזה בסיס אתם משתמשים.

i. פתרון:לפי הבסיס הסטנדרטי $S=\left\{1,x,x^2\right\}$ מתקיים כי $[T]_S^S=A=\begin{pmatrix}-3&4&1\\-2&2&0\\2&-3&-1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$

(ב) מצאו את הפולינום האופיני והפולינום המינימאלי של A.

i. פתרון:הפ"א שווה לפ"מ שהוא $x(x+1)^2$

(ג) קבעו האם A לכסינה. ובכל מקרה, מצאו את צורת זורדן ל A.

i. פתרון: לא לכסינה. צרות זורדן

$$\begin{pmatrix}-1&1&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$$

(ד) מצאו בסיס לגרעין $\ker T$.

i. פתרון:$\left\{1+x-x^2\right\}$

2. יהא $V=\mathbb{R}^5$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. נגדיר ב

$$W=\operatorname{span}\left\{v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ת"מ של V.

(א) מצאו בסיס אורתוגונאלי ל W ע"י שימוש בתהליך גרם שמידט על הבסיס $B=\{v_1,v_2,v_3\}$.

פתרון:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\\-2\\0\end{pmatrix}\right\}$$

(ב) מצאו את ההטלה (הניצבת/האורתוגונלית) של $v=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ על $W'=\operatorname{span}\{v_1,v_2\}$ (כלומר מצאו $\pi_{W'}(v)$).

[רמז: התשובה היא אחת מהבאות: $\left\{\begin{pmatrix}0.5\\1\\0.5\\1\\0.5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0.5\\1\\0.5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.5\\1\\1\\1\\0.5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0.5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0.5\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0.5\\0.5\\1\\0.5\end{pmatrix}\right\}$]

פתרון:

$$\pi_{W'}(v)=\begin{pmatrix}1\\1\\0.5\\1\\0.5\end{pmatrix}$$

תשובות סופיות לחלק ב:

חלק ג ־ שאלות תיאורטיות. בחלק זה 3 שאלות. עליכם לענות על 2 מתוך ה 3.
סמנו בבהירות את השאלות עליהן בחרתם לענות.
כתבו את תשובתכם לחלק ג' בעמודים הבאים המוקדשים לכך (סמנו בראש העמוד את השאלה עליהם אתם עונים).
כל שאלה בחלק זה שווה 20 נקודות.

1. יהא $V=\mathbb{R}^n$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית ויהא $\{0\}\neq W\leq V$ תת מרחב של V.
נגדיר $T:V\to V$ ע"י $Tv=\pi_W(v)$ (פונקצית ההטלה הניצבת).

(א) מצאו את T^*.

פתרון: נבחר בסיס או"נ B_1 ל W ובסיס או"נ B_2 ל $W^\perp$ אזי לפי הבסיס האו"נ $B=B_1\cup B_2$ של V מתקיים כי $[T]_B^B=I_{\dim W}\oplus 0_{\dim W^\perp}$ בגלל ש לכל $w\in W$ מתקיים $Tw=w$ ולכן $v\in W^\perp$ מתקיים $Tv=0$.
כיוון ש Bבסיס או"נ, נקבל כי

$$[T^*]_B^B=\left([T]_B^B\right)^*=[T]_B^B$$

כאשר המעבר האחרון נכון כיוון שהמטריצה אלכסונית. כיוון שייצוג ה"ל היא פונקציה חח"ע נקבל כי $T=T^*$.

(ב) נניח כי $n=3$ ו $W=span\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ (כלומר ציר ה z).

i. מצאו צורת זורדן של T.

פתרון: בשימוש הסימונים והנימוקים של סעיף קודם, אם ניקח $B_1=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\},B_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ נקבל כי

$$[T]_B^B=\begin{pmatrix}1&&\\&0&0\\&0&0\end{pmatrix}$$

ii. הוכיחו/הפריכו: המישור $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in V\,:\,x+y+z=0\right\}$ הוא T־ שמור.

פתרון: הוא לא T שמור. כי עבור $v=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ שבמישור מתקיים כי $Tv=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ שאינו במישור.

2. יהא Vמ"ו מימד סופי. תהא $T:V\to V$ אופרטור לינארי. הוכיחו/הפריכו:

(א) אם $\lambda=0$ הוא הע"ע היחיד של T ו $T\neq 0$ אזי T אינה לכסינה.

פתרון: הוכחה. נניח בשלילה כי T לכסינה. אזי קיים בסיס B כך ש $[T]_B^B=0$ (כי זוהי אלכסונית שעל אלכסונה יש את הע"ע שכולם שווים 0 לפי נתון). כיוון שייצוג ה"ל היא פונקציה חח"ע וגם $[0]_B^B=0$ אזי נקבל כי $T=0$.

(ב) אם קיים $m>1$ טבעי כך ש $T^m=0$ ו T לכסינה אזי $T=0$.

פתרון: הוכחה. נתון כי $p(x)=x^m$ מקיים $p(T)=T^m=0$ לכן $m_T(x)=x^i$ עבור $1\leq i\leq m$ כי הוא מחלק את $p(x)$.
כיוון ש T לכסינה נקבל כי $i=1$ ולכן $m_T(x)=x$ מה שגורר כי $T=0$.

3. תהא $T:\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}^4$ אופרטור לינארי. נתון כי

- $T\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$
- $\ker T=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2i\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1-i\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$
- $\dim\text{Im}\,(T+I)=3$

ענו על השאלות הבאות:

(א) הוכיחו כי T לכסינה ומצאו צורה אלכסונית של T.

פתרון: לפי הנתונים רואים כי $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ הוא ו"ע של ע"ע -2 ו $v_3 = \begin{pmatrix}1-i\\0\\1\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\2i\\0\\3\end{pmatrix}$ הם ו"ע של ע"ע 0 . בנוסף $V_{-1} = \dim\ker(T+I) = 4-3 = 1$ מהנתון האחרון וממשפט המימדים. לכן קיים v_4 ו"ע של -1 . בסך הכל קיבלנו 4 ו"ע בת"ל (כי יש אי תלות בין ו"ע של ע"ע שונים) ולכן T לכסינה (כי 4 הוא מימד המרחב).

(ב) הוכיחו/הפריכו: T^2+T-6I איזומורפיזם.

פתרון: בהמשך לסעיף א', מתקיים כי v_1, v_2, v_3, v_4 הם ו"ע של T^2+T-6I המתאימים לע"ע $(-1)^2+(-1)-6, 0^2+0-6, 0^2+0-6, (-2)^2+(-2)-6$ כיוון שכך, אלו כל הע"ע של הה"ל של השאלה וכולם שונים מאפס ולכן ה"ל חח"ע. בנוסף זוהי ה"ל מ $\mathbb{C}^4$ ל $\mathbb{C}^4$ שהם מאותו מימד ולכן היא גם על. בסה"כ נקבל כי העתקה הפיכה, כלומר איזומורפיזם.

בהצלחה! ☺

תשובות לחלק ג ־ תשובה לשאלה מספר___

תשובות לחלק ג ־ תשובה לשאלה מספר___

תשובות לחלק ג ־ תשובה לשאלה מספר___

תשובות לחלק ג ־ תשובה לשאלה מספר___

הגדרות:

- קבוצות המטריצות מגודל $m \times n$ מעל שדה $\mathbb{F}$ מסומנת ב $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ או ב $\mathbb{F}^{m\times n}$ (תלוי אצל מי למדתם).
- תהא $T : V \to W$ ה"ל.
  - הגרעין מוגדר להיות $\ker T = \{v \in V : Tv = 0\}$.
  - התמונה מוגדרת להיות $\mathrm{Im}T = \{Tv : v \in V\}$.
  - T תקרא איזומורפיזם אם T חח"ע ועל.
  - T תקרא הפיכה אם קיימת ה"ל $S : W \to V$ כך ש $S \circ T = id, T \circ S = id$.
- יהיו $T : V \to W,\ S : W \to U$ שתי ה"ל. ההרכבה $S \circ T : V \to U$ היא הפונקציה המוגדרת $(S \circ T)(v) = S(T(v))$ לכל $v \in V$.
- עבור $T : V \to V$ ה"ל נסמן T^m (לכל m טבעי) את ההרכבה של T על עצמו m פעמים.
- תהא $T : V \to V$ ה"ל. ת"מ $W \le V$ יקרא T שמור אם $Tw \in W$ לכל $w \in W$.
- תהא מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. וקטור $0 \ne v \in \mathbb{F}^n$ ו $\lambda \in \mathbb{F}$ יקראו וקטור עצמי וערך עצמי בהתאמה אם $Av = \lambda v$. המרחב העצמי של ע"ע λ מוגדר להיות $V_\lambda = N(A - \lambda I)$
- יהא V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהא $T : V \to V$ ה"ל . וקטור $0 \ne v \in V$ ו $\lambda \in \mathbb{F}$ יקראו וקטור עצמי וערך עצמי בהתאמה אם $Tv = \lambda v$. המרחב העצמי של ע"ע λ מוגדר להיות $V_\lambda = \ker(T - \lambda I)$
- יהיו V,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהא $T : V \to W$ ה"ל . מטריצת מייצגת של T עם בסיסים B של V ־ B' של W היא מטריצה $[T]^B_{B'} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ המקיימת $[T]^B_{B'}[v]_B = [Tv]_{B'}$ לכל $v \in V$.
- מטריצות $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ יקראו דומות אם קיימת מטריצה $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה כך ש $P^{-1}AP = B$.
- מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ תקרא ניתנת לשילוש אם היא דומה למשולשית.
- מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ תקרא לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית.
- ה"ל $T : V \to V$ נקראת ניתנת ללכסון אם קיים בסיס B ל V כך ש $[T]^B_B$ אלכסונית.
- יהא פולינום $f(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i \in \mathbb{F}[x]$ ומטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הצבה של A בפולינום f היא מטריצה המוגדרת $f(A) = \sum_{i=0}^d a_i A^i$ עם המוסכמה $A^0 = I$.
- תהא מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הפולינום האופיני שלה מוגדר להיות $p_A(x) = |xI - A| \in \mathbb{F}[x]$.
- תהא מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הפולינום המינימאלי שלה מוגדר להיות פולינום מתוקן $0 \ne m_A(x) \in \mathbb{F}[x]$ המקיים כי $m_A(A) = 0$, ובנוסף, לכל פולינום $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ המקיים $p(A) = 0$ מתקיים גם $\deg m_A \le \deg p$.
- יהא Vמ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהא $T : V \to V$ ה"ל. הפולינום האופיני שלה מוגדר להיות $p_T(x) = |xI - A| \in \mathbb{F}[x]$ כאשר $A = [T]^B_B$ מטריצה מציגת שלה.
- יהא Vמ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהא $T : V \to V$ ה"ל. הפולינום המינימאלי שלה מוגדר להיות פולינום מתוקן $0 \ne m_T(x) \in \mathbb{F}[x]$ המקיים כי $m_T(T) = 0$, ובנוסף, לכל פולינום $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ המקיים $p(T) = 0$ מתקיים גם $\deg m_A \le \deg p$.
- מטריצה $J \in \mathbb{F}^{n\times n}$ תקרא בצורת זורדן אם היא מטריצת בלוקים אלכסונית כאשר כל בלוק הוא מהצורה $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$.

- צורת זורדן של מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ היא מטריצת בצורת זורדן J ש A דומה לה.
- מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ תקרא תקרא נילפוטטניטית אם קיים k טבעי כך ש $A^k = 0$.
- יהא Vמ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהא $T : V \to V$ ה"ל. T תקרא תקרא נילפוטטניטית אם קיים k טבעי כך ש $T^k = 0$.
- יהא V מ"ו. מטריצת מעבר $[I]_{B'}^{B}$ בין בסיסים B ל B' היא המטריצה היחידה המקיימת $[I]_{B'}^{B}[v]_B = [v]_{B'}$ לכל $v \in V$.
- יהא V מ"ו מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. מכפלה פנימית על V היא פונקציה $\langle\rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ המקיימת:

  1. לינאריות ברכיב הראשון: $\langle \alpha v_1 + v_2, v\rangle = \alpha \langle v_1, v\rangle + \langle v_2, v\rangle$ לכל $v_1, v_2, v \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$.
  2. הרמטיות $\langle v_1, v_2\rangle = \overline{\langle v_2, v_1\rangle}$ לכל $v_1, v_2 \in V$ (הסימון $\overline{\langle v_2, v_1\rangle}$ פירושו הצמוד המרוכב של $\langle v_2, v_1\rangle$).
  3. אי שליליות: $\mathbb{R} \ni \langle v, v\rangle \geq 0$ לכל $v \in V$. ובנוסף, לכל $v \in V$: $\langle v, v\rangle = 0$ אמ"מ $v = 0$.

  במידה ו $\langle\rangle$מ"פ על V אזי נאמר ש $(V, \langle\rangle)$מרחב מכפלה פנימית.
- יהא V מרחב מכפלה פנימית ו $S \subseteq V$ תת קבוצה. המרחב הניצב ל S מוגדר להיות $S^{\perp} = \{v \in V \mid \forall u \in S : \langle v, u\rangle = 0\}$ (כאשר $\langle\ ,\ \rangle$ היא המכפלה הפנימית).
- יהא $(V, \langle\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית. יהא $V \geq W \neq 0$ ו $v \in V$ הטלה (ניצבת/אורתוגנלית) של v על W הוא וקטור המסומן $\pi_W(v) \in V$ והוא מקיים: 1. $\pi_W(v) \in W$ .2 $v - \pi_W(v) \in W^{\perp}$
- יהא $(V, \langle\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית מעל שדה $\mathbb{F}$.
  - הנורמה המשוריית היא פונקציה $\| \ \| : V \to \mathbb{F}$ המוגדרת $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$
  - וקטורים $v, u \in V$ יקראו אורתוגונאליים אם $\langle v, u\rangle = 0$. קבוצה $S \subseteq V$ תקרא אורתוגונאלית אם כל $v \neq u \in S$ אורתוגונאליים.
  - וקטור $v \in V$ יקרא נורמלי אם $\|v\| = 1$.
  - קבוצה $S \subseteq V$ תקרא אורתונורמלית אם S קבוצה אורתוגונאלית ובנוסף כל $v \in S$ נורמלי.
  - קבוצה $S \subseteq V$ תקרא בסיס אורתוגונאלית אם S קבוצה אורתוגונאלית וגם בסיס.
  - קבוצה $S \subseteq V$ תקרא בסיס אורתונורמלית אם S קבוצה אורתונורמלית וגם בסיס.
- פונקציונאל הוא ה"ל $\varphi : V \to \mathbb{F}$ כאשר V ממ"פ מעל $\mathbb{F}$.
- יהיו V, W מרחבי מכפלה פנימית מעל אותו שדה ותהא $T : V \to W$ ה"ל. העתקה הצמודה $T^* : W \to V$ מוגדרת להיות העתקה המקיימת $\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$ לכל $v \in V$ ולכל $w \in W$ (כאשר $\langle Tv, w\rangle$ היא המכפלה הפנימית על Wו $\langle v, T^*w\rangle$היא המכפלה הפנימית על V).
- תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. נגדיר A^* להיות $\bar{A}^t$ (כאשר $\bar{A}^t$ היא הצמדת כל כניסה במושחלפת של A).
- יהיה V מרחב מכפלה פנימית ו $T : V \to V$ ה"ל.

  1. T תקרא נורמלית אם $T^*T = TT^*$.
  2. T תקרא הרמיטית אם $T^* = T$.
  3. T תקרא אוניטרית $TT^* = I$.
- תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

  1. A תקרא נורמלית אם $A^*A = AA^*$.
  2. T תקרא הרמיטית אם $A^* = A$.
  3. T תקרא אוניטרית $AA^* = I$.