1/11/18

משתנה מקרי רציף:

הצפיפות של מ"מ x - $f_x(t)$ והנוסחה הבסיסית היא: $\int_a^b f_x(t)\,dt = p(a\le x\le b)$

<u>הגדרה</u>: התוחלת של מ"מ רציף:

← **טיפ חשוב**: כל המושגים "שטבעיים" הגדרות/משפטים מהבדיד לרציף: מחליפים Σ ב- $\int$ ומחליפים P_x ב- f_x

בדיד: $E[x]=\sum tP_x(t)$ **רציף**: $E[x]=\int_{-\infty}^{\infty} t f_x(t)\,dt$

<u>דוגמה</u>:

נתון $x\sim U[a,b]$ (x מתפלג יוניפורמי/אחיד בקטע $[a,b]$)

כלומר: $f_x(t)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & t\in[a,b]\\ 0 & t\notin[a,b]\end{cases}$

נחשב את $E[x]$:

$$E[x]=\int_{-\infty}^{\infty} t f_x(t)\,dt=\underbrace{\int_{-\infty}^{a} t f_x(t)\,dt}_{=0}+\int_a^b t f_x(t)\,dt+\underbrace{\int_b^{\infty} t f_x(t)\,dt}_{=0}=\int_a^b t f_x(t)\,dt=$$

$$\int_a^b \frac{t}{b-a}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_a^b=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)=\frac12\cdot\frac{1}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)}(b+a)=\frac{a+b}{2}$$

<u>תרגיל</u>: $x\sim U(0,1)$ חשבו את $E[e^x]$.

נסמן: $y=e^x$ ונמצא את הצפיפות של y, $f_y(t)$.

ונחשב: $E[e^x]=E[y]=\int_{-\infty}^{\infty} t\cdot f_y(t)\,dt$

← כדי למצוא את $f_y(t)$ עבור $y=g(x)$ ו- $f_x(t)$ ידועה. ($g(x)$ פונ' כלשהי)

<u>שיטה</u>: כותבים שרשרת שוויונות

הגדרות

$$\to F_y(t)=P(y\le t)=P(g(x)\le t)=P(x\le g^{-1}(t))=F_y(g^{-1}(t))$$

מבודדים את x.

גוזרים את שני האגפים ומקבלים:

$$f_y(t)=(F_y(t))'=(F_x(g^{-1}(t)))'=f_x(g^{-1}(t))\cdot g^{-1\prime}(t)$$

כלל השרשרת

← נשתמש בשיטה עבור y:

$$F_y(t)=P(y\le t)=P(e^x\le t)=P(x\le \ln t)=F_x(\ln t)$$

מסמנים x. לבודד x

גוזרים ומקבלים: $F'=f$

$$f_y(t)=f_x(\ln t)\cdot\frac1t=\begin{cases}\frac1t ; & 0\le \ln t\le 1 \quad (1\le t\le e)\\ 0 ; & \ln t\notin[0,1] \quad \text{אחרת}\end{cases}$$

← כעת נחשב תוחלת:

$$E[e^x]=E[y]=\int_{-\infty}^{\infty} t f_y(t)\,dt=\int_1^e t\cdot\frac1t\,dt=\int_1^e 1\,dt=e-1$$

<u>משפט</u>: בבדיד: $E[g(x)]=\sum g(t)P_x(t)$

<u>משפט</u>: אם x מ"מ רציף אז: $E[g(x)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)f_x(t)\,dt$

$$E[e^x]=\int_{-\infty}^{\infty} e^t f_x(t)\,dt=\int_0^1 e^t\cdot 1\,dt=\int_0^1 e^t\,dt=\int_1^e e^{\ln s}\cdot\frac{1}{s}\,dt=\underbrace{\int_1^e s\cdot\frac{1}{s}\,ds}_{\text{אינטגרל מיידי}}$$;(שראינו בחדו"א

$t=\ln s$
$dt=\frac{1}{s}ds \Rightarrow$ $t=0 \Rightarrow s=1$
$t=1,\ s=e$

השונות של מ"מ רציף x:

$$V[x]=E[x^2]-(E[x])^2=\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_x(t)\,dt-\left(\int_{-\infty}^{\infty} t f_x(t)\,dt\right)^2$$

דוגמא:

חשבו את $V[x]$ כאשר $x\sim U[a,b]$: $f_x(t)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}; & t\in[a,b]\\ 0; & \text{אחרת}\end{cases}$

← חישבנו כבר $E[x]=\frac{a+b}{2}$ (נחשב: $E[x^2]$;

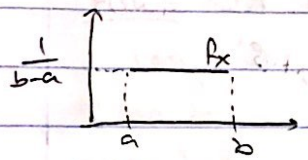
$$E[x^2]=\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_y(t)\,dt=\int_a^b t^2\cdot\frac{1}{b-a}\,dt=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_a^b=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{3}(b^3-a^3)=$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{b-a}(b-a)\cdot(b^2+ab+a^2)=\frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$V[x]=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

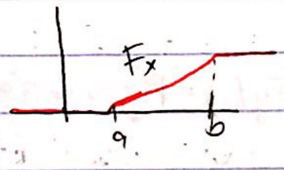
סיכום:

$X\sim U[a,b]$



$$f_x(t)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\le t\le b\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{t} f_x(t)\,dt=F_x(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ \frac{t-a}{b-a} & a\le t\le b\\ 1 & b\le t\end{cases}$$



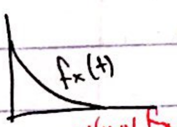
$$E[x]=\frac{a+b}{2},\quad V[x]=\frac{(b-a)^2}{12}$$

התפלגות מעריכית (אקספוננציאלית) $x\sim \exp(\lambda)$

דוגמאות:

1. זמן מחצית החיים של איזוטופ מתפרק מעריכית
2. משך חיי נורה במטבח של מתיחי
3. זמן בין הכניסה של שני לקוחות עוקבים לחנות

$$f_x(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & 0<t\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$



F_x מונוטונית עולה

$$F_x(t)=\int_{-\infty}^{t} f_x(s)\,ds=0\quad \left(\underset{t<0}{\text{כאשר}}\right)$$

$$F_x(t)=\int_{-\infty}^{t} f_x(s)\,ds=\int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\,ds=-e^{-\lambda s}\Big|_0^t=1-e^{-\lambda t}\Rightarrow F_x(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1-e^{-\lambda t} & t\ge 0\end{cases}$$

סיון.
11118

<u>המשך</u> -

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)\,dt = \int_0^{\infty} t\cdot\lambda e^{-\lambda t}\,dt = t\cdot(-e^{-\lambda t})\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 1\cdot(-e^{-\lambda t})\,dt$$

$u\cdot v'$ $\quad$ $u\cdot v$ $\quad$ $-$ $u'v$

$$= \lim_{t\to\infty} -\frac{t}{e^{\lambda t}} - 0(-e^{-\lambda\cdot 0}) = 0 - 0 - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$\lim_{t\to\infty} \frac{-1}{\lambda e^{\lambda t}} = 0$ לופיטל

$$E[X^2] = \int_0^{\infty} t^2\cdot\lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left\{\begin{matrix}\text{אינטגרציה} \\ \text{בחלקים פעמיים}\end{matrix}\right\} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\to V[X] = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

\# השתמשנו במשפט: $E[g(x)] = \int g(t) f_X(t)\,dt$, $g(x) = x^2$

המעריכי והגיאומטרי שניהם הזמן עד שקורה משהו. לכן יש ביניהם קשר הדוק.

הגיאומטרי מספר ניסיונות: $1,2,3,\dots$

המעריכי סופר זמן: $\mathbb{R}$ (גרסה רציפה של הגיאומטרי).

← גם המעריכי מקיים את תכונת חוסר הזיכרון אם $X\sim exp(\lambda)$

$$P(X \ge t+s \mid X \ge t) = P(X \ge s)$$

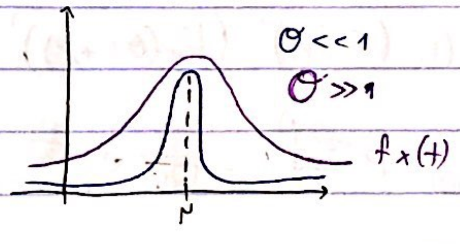
ההסתברות להמתין t+s יחידות זמן בהינתן שהמתנו כבר t יחידות = ההסתברות להמתין s יחידות זמן מלכתחילה.

המעריכי והגיאומטרי הם היחידים המקיימים שוויון זה.

<u>מ"מ נורמלי</u>: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot \exp(-(t-\mu)^2/2\sigma^2)$$

f_x היא "הפעמון של גאוס".
μ הוא מרכז הפעמון. ככל ש-σ^2 גדול יותר, כך הפעמון "פחוס" יותר.

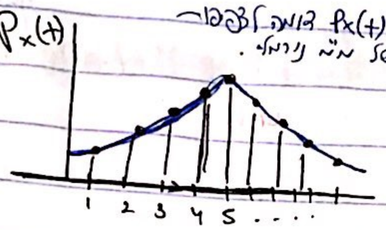


חשיבות ההתפלגות הנורמלית נובעת מ"משפט הגבול המרכזי" שאומר באופן לא מדויק: כאשר מ"מ X מורכב מהרבה חלקים קטנים ב"ת ודומים אז ל-X יש התפלגות בערך נורמלית.

<u>דוגמאות:</u>

ציון.

1. ציון סטודנט אקראי במבחן (הרבה סטודנטים, טוב, ניגשים לאותו מבחן, לא מעתיקים - ב"ת)
2. משקל דג אקראי שנדוג בבריכה.
3. מס' ההצלחות ב-n ניסויי ברנולי כאשר n גדול.



משמעות: כאשר n גדול, ואם $X\sim Bin(n,p)$ אז ההתפלגות של X דומה לנורמלית.

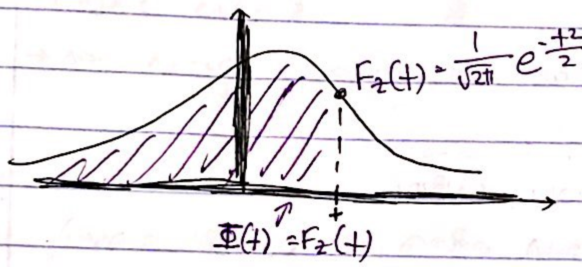
אין דרך פשוטה עבור ההצטברות של $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ כי ל- $f_X(t)$ אין פונקציה קדומה. כלומר:

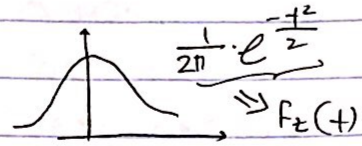
$$F_X(t)=\int_{-\infty}^{t} f_X(s)\,ds=\underbrace{\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot \exp\left(-(s-\mu)^2/2\sigma^2\right)ds}_{\text{אי אפשר לחשב!}}$$

← עבור $X\sim N(0,1)$ אפשר לחשב את $F_X(t)$ בשיטה נומרית (יש פונקציה שכבר תיכנתו).

$Z\sim N(0,1) \iff \mu=0,\ \sigma^2=1$

נקרא נורמלי "סטנדרטי" ומסומן לרוב ב- Z. ההצטברות של Z מסומנת:
ונהוג לסימון: $F_Z(t)=\Phi(t)$. (אפשר לחשב את Φ במחשב).





תיקנון מ"מ נורמלים:

(משפט): אם $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ אז עבור $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ ("ציון התקן של x") מתקיים $Z\sim N(0,1)$

← <u>הוכחה</u>: נחשב את הצפיפות של Z:

$$F_Z(t)=P(Z\le t)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\le t\right)\overset{\text{נחלץ x}}{=}P(X\le \sigma\cdot t+\mu)=F_X(\sigma t+\mu)$$

σ תמיד חיובי

גוזרים את שני האגפים

$$\Rightarrow f_Z(t)=(F_Z(t))'=(F_X(\sigma t+\mu))'\overset{\text{כלל שרשרת}}{=}f_X(\sigma t+\mu)\cdot\sigma=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cancel{\sigma}}\cdot e^{\left(-\frac{(t\sigma+\cancel{\mu}-\cancel{\mu})^2}{2\sigma^2}\right)}\cdot\cancel{\sigma}$$

הנוסחה של $F_X(t)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\sigma t)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\Rightarrow$$ וכאן מצאנו ש- Z מתפלג $N(0,1)$ (כי הצפיפות שלו מתאימה ל- $N(0,1)$)

⇐ מסקנה מהמשפט: אם $X\sim N(\mu,\sigma^2)$:

$$F_X(t)=P(X\le t)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{t-\mu}{\sigma}\right)=P\left(Z\le\frac{t-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

ולכן אפשר להשתמש בפונקציה המחשבת את Φ כדי לחשב את $F_X(t)$.

← אמרנו שאם $X\sim Bin(n,p)$ כאשר n גדול אז X דומה למ"מ נורמלי. (איזה נורמלי? מה הפרמטרים שלו?)

X יהיה דומה למ"מ $Y\sim N(\mu,\sigma^2)$ כאשר $E[Y]=E[X]$ וגם $V[Y]=V[X]$. (למה דומים
יש תוחלת ושונות דומים). ידוע: $E[Y]=\mu$, $V[Y]=\sigma^2$. $X\sim Bin(n,p)\Rightarrow E[X]=np,\ V[X]=npq$ ($q=1-p$)

<u>מסקנה</u>: אם $X\sim Bin(n,p)$ אז X דומה ל- Y כאשר $Y\sim N(np,npq)$ (משפט דה מואבר לפלס).

1/11/18.

תרגיל דוגמא

חשבי קירוב להסתברות שב-10,000 הטלות של מטבע הוגן יצאו בין 5000 ל-6000 "עץ".

פתרון: $X \sim Bin(10000, \frac{1}{2})$

$$P(5000 \le X \le 6000) = \sum_{k=5000}^{6000} \binom{10{,}000}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{10{,}000}$$ אי אפשר לחשב במחשב

אבל x דומה ל-y: $y \sim N(5000, 2500)$.

$$P(5000 \le X \le 6000) \approx \underbrace{P(5000 \le y \le 6000)}_{P(A \cap B^c)} = \underbrace{P(y \le 6000)}_{P(A)} - \underbrace{P(y \le 5000)}_{P(B)} =$$

תיקון: מורידים ~ מחליפים ב-θ.

$$= P\left(Z \le \frac{6000-5000}{50}\right) - P\left(Z \le \frac{5000-5000}{50}\right) = \Phi(20) - \Phi(0) =$$

$$\Phi(20) - \frac{1}{2} \approx \frac{1}{2}$$