

תרגיל בית 2

1. נתונה הצגה פרמטרית של עקומה במערכת גלילית:

$$r = r(t), \theta = \theta(t), z(t) = t \quad a \leq t \leq b$$

הראו כי אורך הקשת של העקומה הוא - $L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{dz(t)}{dt}} dt$

רמז: העזרו בשוויונות $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$

פתרון: נגזור

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \end{aligned}$$

2. חשבו את $\int_C \frac{1}{1+x} ds$ כאשר C היא העקומה $0 \leq t \leq 3$ $x = t, y = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}$

פתרון: נשתמש בנוסחה שלמדנו בכיתה על מנת לקבל

$$\int_C \frac{1}{1+x} ds = \int_0^3 \frac{1}{1+t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^3 \frac{1}{1+t} \sqrt{1+t} dt = 2$$

3. חשבו את $\int_C 3x^2 yz ds$ כאשר C היא העקומה $0 \leq t \leq 1$ $x = t, y = t^2, z = \frac{2}{3}t^3$

פתרון:

$$\begin{aligned} \int_C 3x^2 yz ds &= \int_0^1 3t^2 t^2 \frac{2}{3} t^3 \sqrt{1+4t^2+4t^4} dt = \int_0^1 2t^7 \sqrt{4\left(t^2 + \frac{1}{2}\right)^2} dt \\ &= \int_0^1 t^7 4\left(t^2 + \frac{1}{2}\right) dt = \int_0^1 4t^9 + 2t^7 dt = \frac{13}{20} \end{aligned}$$

4. חשבו את $\int_C (x^2 + y^2) dx - xdy$ לאורך רבע המעגל $x^2 + y^2 = 1$ מ $(1,0)$ עד $(0,1)$.

פתרון: נציב $y = \sin t$ $x = \cos t$ ונקבל עפ"י מה שלמדנו בתרגול

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t + \sin^2 t)(-\sin t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t (\cos t) dt =$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = -1 - \frac{\pi}{4}$$