חקר ביצועים - הרצאה 9

12 בינואר 2012

המשך ניתוח רגישות

בשיעור הקודם ראינו את המשוואות

$$\begin{aligned}
(1)\ x_B &= B^{-1}b \\
(2)\ y &= c_B B^{-1} \\
(3)\ \bar{c}_j &= \sum_{i=1}^{m} y a_{ij} - c_j \\
(4)\ \bar{c}_j &= \sum_{i=1}^{m} c_{B_i} \bar{a}_{ij} - c_j \\
(5)\ \bar{a}_j &= B^{-1} a_j
\end{aligned}$$

בשיעור הקודם ראינו שינוי בc_j שאינו בסיסי.
היום נמשיך עם שינוי בc_j בסיסי.

שינוי בc_j בסיסי

בדוגמה שלנו, ניקח את פונק' המטרה ונשנה את המקדמים של x_1 וx_2 כך שפונק' המטרה תהיה:

$$z = 4x_1 + 10x_2 + 4x_3$$

נחשב $\bar{c}_j$ לפי נוסחה 4:

$$\bar{c}_1 = \begin{pmatrix} 10 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 = 0$$

המקדם של x_1 בטבלה הסופית ($\bar{c}_1$) הוא אכן 0 x_1 בבסיס.

$$\bar{c}_2 = \begin{pmatrix} 10 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 10 = 0$$

גם x_2 בבסיס.

$$\bar{c}_3 = \begin{pmatrix} 10 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix} - 4 = -\frac{2}{5}$$

קיבלנו מקדם שלילי ולכן הטבלה אינה אופטימלית.

$$\begin{aligned}
\bar{c}_4 &= \begin{pmatrix} 10 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} - 0 = \frac{24}{5} > 0 \\
\bar{c}_5 &= \begin{pmatrix} 10 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} - (-M) = M - \frac{2}{5} > 0
\end{aligned}$$

במקרה הזה נוצרה לנו טבלה שאינה אופטימלית, x_3 ייכנס לבסיס.
במקרה של משתנה בסיסי שהשתנה כתוצאה מניתוח רגישות, נעבוד באופן דומה למה שעשינו: נוציא את כל המקדמים של פונק' המטרה, אם יווצר לנו מקדם שלילי בפונק' המטרה, הפונק' כבר לא תהיה אופטימלית ונצטרך להמשיך לפתור סימפלקס.
חשוב לזכור - שבכל פעם צריך למצוא גם את ערך פונק' המטרה.

לסיכום

אם עושים שינוי בc_j של משתנה לא בסיסי עלינו למצוא רק את $\bar{c}_j$ של אותו משתנה.
אם עושים שינוי בc_j של משתנה בסיסי, נצטרך למצוא את $\bar{c}_j$ של כל המשתנים, כדי לדעת האם הפונק' עדיין אופטימלית.

שינוי בa_{ij}

הבעיה המקורית נמצאת בדף שרומי חילקה בהרצאה 7.
אם נעשה שינוי במקדמי האילוצים שלx_1 או x_2 (משתני הבסיס) נשנה לפחות אחד מאיברי המטריצה, ז"א שB משתנה וכתוצאה מכך B^{-1} ישתנה.
במקרה כזה נצטרך לפתור את הכל מהתחלה.
לא רלוונטי כל כך לעסוק בשינוי של מקדמי משתני העזר (עודף, חוסר או מלאכותיים) מכיוון שהם משתנים שהוספנו לעזר בפתרון הבעייה.
נראה מה קורה כאשר נשנה מקדם אילוץ של משתנה שאינו בסיסי, במקרה שלנו המקדם של x_3.
המקדמים המקוריים הם

$$a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

נשנה את המקדמים:

$$a_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

אזי לפי נוסחה 5:

$$\begin{aligned} \bar{a}_3 &= B^{-1}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ועכשיו נחשב את $\bar{c}_3$:

$$\begin{aligned} \bar{c}_3 &= \begin{pmatrix} \frac{29}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} - 4 \\ &= -29 - \frac{4}{5} - \frac{20}{5} = -\frac{169}{5} \end{aligned}$$

קיבלנו תוצאה שלילי, ז"א שהפתרון לא אופטימלי, x_3 ייכנס לבסיס.
השינוי שעשינו במקרה זה גרם לכך שהפתרון לא חסום (היות וכל המקדמים הינם שליליים).
מה המגבלות על a_{23}? עד כמה הוא יכול להשתנות?

$$\begin{aligned} a_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ a_3^{'} &= \begin{pmatrix} 1 \\ a_{23}^{'} \end{pmatrix} \\ \bar{c}_3 &= \begin{pmatrix} \frac{29}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a_{23}^{'} \end{pmatrix} - 4 \\ &= \frac{29}{5} - \frac{2a_{23}^{'}}{5} - 4 \\ &= \frac{9}{5} - \frac{2a_{23}^{'}}{5} \geq 0 \\ &\Downarrow \\ a_{23}^{'} &\leq 4.5 \end{aligned}$$

טווח השינוי האפשרי המקסימלי הוא 4.5.

הוספת משתנה

נוסיף משתנה לבעיה המקורית:

$$\begin{aligned}
\max\ z &= 5x_1+12x_2+4x_3+6x_6 \\
\text{s.t} &: x_1+2x_2+x_3+5x_6 \le 5 \\
& 2x_1-x_2+3x_3+7x_6 = 2 \\
& x_i \ge 0
\end{aligned}$$

המשתנה שנוסף x_6 מתווסף הן לפונק' המטרה והן לאילוצים, כלומר מתווספת עמודה.
המשתנה שנוסף הוא לא בסיסי בטבלה הראשונה. נמצא את מקדם המשתנה בפונק' המטרה בטבלה האחרונה לפי נוסחה 3.
אם ערכו יהיה שלילי, הוא ייכנס לבסיס וישנה את פונק' המטרה, אחרת פונק' המטרה לא תשתנה.
נשתמש בנוסחה:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_6 &= ya_6-c_6 \\
&= \begin{pmatrix}\frac{29}{5} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}-6 \\
&= 29-\frac{14}{5}-6>0
\end{aligned}$$

מצאנו שהערך של $\bar{c}_6$ גדול מ-0 ולכל הפתרון עדיין אופטימלי.
נבדוק עד כמה המקדם של x_6 בפונק' המטרה יכול לגדול :

$$\begin{aligned}
\bar{c}_6 &= 29-\frac{14}{5}-c_6^{'}>0 \\
c_6^{'} &< 26\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

הוספת אילוץ

$$\begin{aligned}
\max\ z &= 5x_1+12x_2+4x_3 \\
\text{s.t} &: x_1+2x_2+x_3 \le 5 \\
& 2x_1-x_2+3x_3 = 2 \\
& 5x_1+5x_2+3x_3 \le 20 \\
& x_j \ge 0
\end{aligned}$$

האילוץ השלישי הוא זה שהוספנו.
בשלב הראשון, נבדוק האם הפתרון האופטימלי מקיים את האילוץ החדש.
אם הוא מקיים את האילוץ, אין עוד פעולות לבצע.
בבעיה שלנו, $x_1=\frac{9}{5}$ ו-$x_2=\frac{8}{5}$ לכן הפתרון מקיים את האילוץ שהוספנו.
נשנה את האילוץ שהוספנו:

$$5x_1+5x_2+3x_3 \le 10$$

עכשיו הפתרון האופטימלי שקיבלנו לא מקיים את האילוץ החדש. נסתכל על טבלת הסימפלקס האחר-ונה:

משתני בסיס	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5}+M$	0	28.2
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{8}{5}$
x_1	0	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{9}{5}$
x_6	0	0	0	-3	-3	-1	1	-7

אילו היינו מוסיפים את האילוץ השלישי מלכתחילה, הוא היה מקבל את המבנה:

$$5x_1+5x_2+3x_3+x_6=10$$

האילוץ היה מקבל שורה נוספת בטבלה, ו-x_6 היה בבסיס.
היות ואנו לא רוצים לפתור מחדש, נראה כיצד ניתן להמשיך לפתור את הבעיה מהנקודה בה אנו נמצאים.

היות וכל אילוץ מכיל רק משתנה בסיסי אחד, משוואת האילוץ השלישי לא יכולה להתקיים כי מופיעים בה 3 משתנים בסיסיים.
נרצה להשאיר את x_6 באילוץ השלישי ואת x_1 וx_2 נוציא מהאילוץ.
את השורה של x_2 נכפיל ב-5.
את השורה של x_1 נכפיל ב-5.
נוסיף לאילוץ השלישי ונקבל:

$$0x_1 + 0x_2 - 3x_3 - 3x_4 - \bar{x}_5 + x_6 = -7$$

אך קיבלנו ש$x_6 = -7 < 0$, וזה לא מקיים את אילוץ אי השליליות. במקרה זה נעשה סימפלקס דואלי - נלמד בשבוע הבא.