תרגיל 7-מתמטיקה בדידה

שאלה 1. יהי (A,R) קס"ח. נגדיר את היחס: $R^{-1} := \{(b,a)\colon (a,b)\in R\}$.

א. הראו כי (A,R^{-1}) קס"ח.

ב. הראו כי אם קיים $a\in A$ כך שלכל $b\in A$ מתקיים $a\,\mathrm{R}\,b$ או $a=b$ (איבר כזה נקרא מינמום ביחס ל R) אזי קיים $c\in A$ כך שלכל $b\in A$ מתקיים: $c\,\mathrm{R}\,b$ או $c=b$.

ג. נסתכל על הקס"ח $\mathcal{P}(\{0,1,2,3\},\subseteq)$. ציירו את דיאגרמת הסה של הקס"ח $\mathcal{P}(\{0,1,2,3\},\subseteq^{-1})$.

שאלה 2. נסתכל על הקבוצה הבאה: $\mathbb{N}^{\uparrow}_{\text{seq}} := \{\langle x_n\colon n\in\mathbb{N}\rangle \subseteq \mathbb{N}\colon \forall n\in\mathbb{N}\ (x_n\le x_{n+1})\}$
ונגדיר עליה יחס $\preceq$ באופן הבא:

$$x=\langle x_n\colon n\in\mathbb{N}\rangle \preceq y=\langle y_n\colon n\in\mathbb{N}\rangle \ \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}\colon \forall m>n\,(x_m<y_n)$$

א. הראו כי $(\mathbb{N}^{\uparrow}_{\text{seq}},\preceq)$ קס"ח.

ב. הוכיחו או הפריכו: $\exists x\neq y\in\mathbb{N}^{\uparrow}_{\text{seq}}\colon (x\npreceq y)\wedge(y\npreceq x)$ כלומר, לא "שלם" .

שאלה 3. נכליל את היחס הלקסיקוגרפי, נסתכל על הקבוצה: $\mathbb{N}^n := \underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\cdots\mathbb{N}}_{n\ times}$. נגדיר עליה את היחס $<$ באופן הבא:

$$a=(a_1,\cdots,a_n)<b=(b_1\cdots b_n)\ \Leftrightarrow\ \exists k\le n\colon (\forall i<k\,(a_i=b_i))\wedge(a_k<b_k)$$

א. הוכיחו או הפריכו כי $(\mathbb{N}^n,<)$ קס"ח.

ב. הוכיחו או הפריכו: לכל $a\neq b\in\mathbb{N}^n$ מתקיים: $a<b$ או $b<a$.

ג. עבור המקרה $n=2$ נסו לצייר את דיאגרמת הסה המתאימה.

שאלה 4. יהי X קבוצה. נגדיר את הקבוצה $\mathcal{R}$ להיות קבוצת כל היחסים החלשים על X. כעת נגדיר יחס $\sqsubseteq$ על $\mathcal{R}$.
עבור $\le$ ו- $\trianglelefteq$ יחסים חלשים על X מתקיים:

$$\le\sqsubseteq\trianglelefteq\ \Leftrightarrow\ \forall x,y\in X(x\le y\to x\trianglelefteq y)$$

א. האם $(\mathcal{R},\sqsubseteq)$ קס"ח? אם כן הוכיחו, אם לא תנו דוגמא נגדית.

ב. האם ב- $(\mathcal{R},\sqsubseteq)$ כל שני איברים מתייחסים אחד לשני? (כלומר; שלם).

שאלות רשות.

א. הראו כי קיים m טבעי כך שלכל $m\le n$ טבעי מתקיים:

$$n^3<2^n$$

ב. יהי $\mathbb{R}[x]$ קבוצת כל הפולינומים עם מקדמים ממשים. נגדיר עליה את היחס $\sqsubseteq$. עבור f,g פולינומים עם מקדמים ממשיים:

$$f\sqsubseteq g\ \Leftrightarrow\ \exists x\in\mathcal{R}\colon \forall y\ge x\,(f(y)\le g(y))$$

האם $(\mathbb{R},\sqsubseteq)$ קס"ח? האם תוכלו להוכיח כי $\sqsubseteq$ שלם?