פתרון תרגיל בית 9 – טופולוגיה

שאלה 1

נתבונן בשלושה תתי מרחבים של $\mathbb{R}^2$:

$$X=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}$$

$$Y=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-2)^2+y^2=1\right\}$$

$$Z=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=1\right\}$$

ראינו בכיתה ש- Z אינו הומיאומורפי ל- X. האם Y הומיאומורפי ל- X או ל- Z? **הוכיחו את תשובתכם!**

פתרון

עשינו הוכחות מלאות כאלה בכיתה ולכן כאן נרשום רק את הרעיון. הרעיון הוא שב- X וב- Z, הוצאת **כל** נקודה לא פוגעת בקשירותו של המרחב. עם זאת ב- Y, ישנה נקודה **אחת** שהוצאתה פוגעת בקשירות (נקודת ההשקה).

מש"ל

שאלה 2

הוכיחו כי $\mathbb{R}$ אינו הומאומורפי ל- $\mathbb{R}^n$ עבור $n>1$.

פתרון

נראה כי לכל $n>1$, $\mathbb{R}^n$ לא הומיאומורפי ל- $\mathbb{R}$. אם נזרוק נקודה מ- $\mathbb{R}$ נקבל מרחב שאינו קשיר. אמנם, עבור $b\in\mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{R}\setminus\{b\}=(-\infty,b)\cup(b,\infty)$. לעומת זאת לכל $n>1$, אם נזרוק נקודה מ $\mathbb{R}^n$ נקבל מרחב קשיר מסילתית ולכן קשיר.

הסבר: $\mathbb{R}^n-\{a\}$ קשיר מסילתית לכל $n>1$ ולכל $a\in\mathbb{R}^n$. נניח $x,y\in\mathbb{R}^n-\{a\}$ אם הקו הישר המחבר ביניהן לא עובר דרך a אז המסילה הסטנדרטית מקשרת בין x ו-y גם ב- $\mathbb{R}^n-\{a\}$.

אחרת, מכיוון ש$n>1$ ברור שקיים ישר שונה (מהישר המחבר x ו-y) שעובר דרך x. ניקח נקודה הנמצאת עליו ושונה מ x ונסמנה z. ברור שהמסילה הסטנדרטית מקשרת בין x ו-z

(a לא נמצאת על ישר זה). כמו כן, a לא נמצאת על הישר המחבר בין z ו- y ולכן קיימת מסילה (הסטנדרטית) המחברת בין y ל-z. אם יש מסילה ב $\mathbb{R}^n-\{a\}$ בין x ל y וכן מסילה בין y ל z אז יש גם מסילה בין x ל- z (שרשור של המסילות). היחס הוא יחס שקילות ובפרט טרנזיטיבי.

כעת, אם היה קיים הומיאו' $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ אז גם $f|_{\mathbb{R}^n\setminus\{a\}}:\mathbb{R}^n\setminus\{a\}\to\mathbb{R}\setminus\{f(a)\}$ היה הומיאו'. אבל כפי שתיארנו המרחב השמאלי קשיר ואילו הימני אינו קשיר, בסתירה לכך שהומיאומורפיזם שומר על קשירות.

מש"ל

<u>שאלה 3</u>

<u>תרגיל (ממבחן)</u>

יהי $A\subseteq\mathbb{R}$. הראו שאם A צפוף ב $\mathbb{R}$ ו $A\neq\mathbb{R}$ אז A איננו קשיר.

<u>פתרון</u>

נניח $z\in\mathbb{R}\setminus A$ נקודה במשלים.

נסמן $A_1:=(-\infty,z)\cap A,\quad A_2:=(z,\infty)\cap A$.

בודקים ש $A=A_1\cup A_2$ פירוק טופולוגי של A.

נימוק: ברור $A_1\cap A_2=\varnothing$ (כי $(-\infty,z)\cap(z,\infty)=\varnothing$).

$A_1 := (-\infty, z) \cap A, A_2 := (z, \infty) \cap A$ קבוצות פתוחות ב A ע"פ הגדרת טופולוגית תת מרחב.

$A_1 := (-\infty, z) \cap A \neq \varnothing, \quad A_2 := (z, \infty) \cap A \neq \varnothing$ כי A צפוף ב $\mathbb{R}$.

מש"ל

<u>שאלה 4</u>

א. הראו שלכל טופולוגיה יש בסיס.

ב. הראו שאם B_1 הוא אוסף של קבוצות פתוחות במרחב (X, τ), המכיל בסיס B_2 ל-τ, אזי B_1 הוא בעצמו בסיס ל-τ.

ג. יהיו τ_1, τ_2 טופולוגיות על X. יהי B_1 בסיס ל-(X, τ_1). אזי: $\tau_1 \subseteq \tau_2$ אם ורק אם $B_1 \subseteq \tau_2$.

<u>פתרון</u>

א. בתור בסיס ניתן לקחת את הטופולוגיה עצמה (קל לראות שהתכונות הדרושות עבור בסיס מתקיימות באופן טריוויאלי).

ב. B_1 הוא אוסף של קבוצות פתוחות ולכן נותר לבדוק את התנאי השני. תהי $O \in \tau$ ותהי $x \in O$. נרצה למצוא $U \in B_1$ כך ש-$x \in U \subseteq O$. B_2 בסיס ולכן קיימת $U \in B_2$ המקיימת $x \in U \subseteq O$. מכיוון ש-$B_2 \subseteq B_1$ נקבל ש-$U \in B_1$וקיבלנו את הדרוש.

ג. אם $\tau_1 \subseteq \tau_2$ אזי ברור ש-$B_1 \subseteq \tau_2$ (כי $B_1 \subseteq \tau_1$ כבסיס ל-(X, τ_1)). בכיוון השני: תהי $O \in \tau_1$. קיימת משפחה של אינדקסים I ומשפחה של קבוצות $\{U_i\}_{i \in I}$ כך שלכל $i \in I$ $U_i \in B_1$ ומתקיים $O = \bigcup_{i \in I} U_i$ (מהגדרת בסיס). נתון כי $B_1 \subseteq \tau_2$ ולכן לכל $i \in I$ $U_i \in \tau_2$. אך τ_2 היא טופולוגיה ולכן $O = \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau_2$.

<u>שאלה 5</u>

א. יהיו X,Y מ"ט. יהיו $F\subseteq X, G\subseteq Y$ סגורות. הוכיחו כי הקבוצה $F\times G$ סגורה ב- $X\times Y$.

ב. יהיו X,Y מ"ט, $A\subseteq X, B\subseteq Y$. הוכיחו כי $\overline{A\times B}=\bar{A}\times\bar{B}$ (או בסימון חלופי: $cl(A\times B)=cl(A)\times cl(B)$).

<u>פתרון</u>

א. נראה שהמשלים של $F\times G$ הינה קבוצה פתוחה.

$(F\times G)^C=((X\setminus F)\times Y)\cup(X\times(Y\setminus G))$ והיא פתוחה כאיחוד פתוחות (בסיסיות).

ב. בכיוון הראשון $\supseteq$:

תהי $(a,b)\in\bar{A}\times\bar{B}$ ונראה ש- $(a,b)\in\overline{A\times B}$.

מהגדרת הבסיס לטופולוגיית המכפלה מ"ל שלכל $U\subseteq X, V\subseteq Y$ סביבות פתוחות של a,b בהתאמה, מתקיים: $\varnothing\neq(U\times V)\cap(A\times B)$.

תהיינה $U\subseteq X, V\subseteq Y$ סביבות פתוחות של a,b בהתאמה. מכיוון ש- $a\in\bar{A}\wedge b\in\bar{B}$ נקבל ש- $(V\cap B)\neq\varnothing \ \wedge \ (U\cap A)\neq\varnothing$. מכאן רואים כי:

$\varnothing\neq(U\cap A)\times(V\cap B)=(U\times V)\cap(A\times B)$.

הערה: $U\times V$ היא סביבה פתוחה בסיסית של (a,b), וראינו בכיתה שבהגדרת סגוֹר מספיק לרוץ על הסביבות הבסיסיות.

בכיוון השני $\subseteq$:

על-פי סעיף א', $\bar{A}\times\bar{B}$ סגורה וכמו כן מתקיים $A\times B\subseteq\bar{A}\times\bar{B}$ ולכן $\overline{A\times B}\subseteq\bar{A}\times\bar{B}$.

<u>שאלה 6</u>

א. יהי X מ"ט. נגדיר את האלכסון של $X\times X$ להיות $\Delta=\{(x,x):x\in X\}$. הראו שאם Δ סגור ב- $X\times X$ אזי X הוא האוסדורף. (שימו לב שאת הכיוון השני של הטענה הזו הוכחנו בתרגול.)

ב. מצאו דוגמה למרחב טופולוגי (X,τ) עם קבוצה צפופה $A\subseteq X$ ושתי פונקציות <u>רציפות</u> <u>שונות</u> $f,g:X\to X$ המתלכדות על A.

<u>פתרון</u>

א. נניח שהאלכסון Δ סגור ב- $X\times X$ ונניח בשלילה ש- X אינו האוסדורף. אזי קיימות $a\neq b\in X$ כך **שלכל** U,V סביבות של a,b בהתאמה, $U\cap V\neq\varnothing$. אך אז נקבל שלכל סביבה בסיסית $U\times V$ של (a,b) (הכוונה לקבוצה בבסיס של טופולוגיית המכפלה) מתקיים $(U\times V)\cap\Delta\neq\varnothing$ (מדוע?) וזה מראה כי $(a,b)\in cl(\Delta)$ (הראינו שבהגדרה של סגור מספיק לבדוק סביבות בסיסיות) למרות ש$(a,b)\notin\Delta$ וזו סתירה לכך שהאלכסון Δ סגור.

ב. נתבונן במרחב $(\mathbb{R},\tau_{triv})$ ובקבוצה הצפופה $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ (מדוע היא צפופה?). נתבונן בנוסף בשתי פונקציות $g(x)=1$, $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. הן רציפות (מדוע?), שונות ומתלכדות על $\mathbb{Q}$.

<u>שאלה 7</u>

יהי X מ"ט ויהיו $A,B\subseteq X$. נתון כי A קשיר, B סגוחה (סגורה ופתוחה) וכן $A\cap B\neq\varnothing$. הוכיחו כי $A\subseteq B$.

<u>פתרון</u>

הקבוצה $A\cap B$ פתוחה וסגורה בתת-מרחב A (לפי הגדרת טופולוגיית תת-מרחב) ומכיוון ש-$A\cap B\neq\varnothing$ ו-A קשיר, נקבל $A\cap B=A$ ולכן $A\subseteq B$.

<u>שאלה 8</u>

יהי X מ"ט ותהיינה $A,B\subseteq X$ תת-קבוצות סגורות. נניח כי התת-מרחבים $A\cup B$ ו- $A\cap B$ קשירים. הוכיחו ש- A ו- B קשירים. הדרכה: מ"ל ש-A - קשיר שכן ההוכחה ש- B קשיר סימטרית. הניחו בשלילה ש- $A=U\cup V$ כאשר U,V סגורות...

<u>פתרון</u>

נניח בשלילה ש- A לא קשיר אזי קיימות U,V זרות, לא ריקות, וסגורות ב- A כך ש- $A=U\cup V$. מתקיים $A\cap B=(U\cap B)\cup(V\cap B)$ כאשר $A\cap B$ קשיר ו- $U\cap B,V\cap B$ סגורות ב- $A\cap B$ (מדוע?). בה"כ $V\cap B=A\cap B,\ \ U\cap B=\varnothing$. מתקיים $A\cup B=U\cup(V\cup B)$ כאשר U זר ל- $V\cup B$ (שכן U זר ל- V ו- U זר ל- B), כמו כן $U,V\cup B$ לא ריקות. לבסוף, ניתן להסיק ש- $U,V\cup B$ סגורות ב- $A\cup B$ מכך ש U,V סגורות ב- A וכן A,B סגורות ב- X. כמובן שהפירוק $A\cup B=U\cup(V\cup B)$ סותר, לאור כל מה שציינו לעיל, את קשירות $A\cup B$.