תרגיל לעבודה עצמית 6

שאלה 1

פתור את האינטגרל הבא בעזרת הצבה אוניברסאלית $\int \frac{1-3\sin 2x}{1+\cos 2x}dx$.

פתרון

נציב $t = tgx$ ואז $dx = \frac{dt}{1+t^2}, \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\int \frac{1-3\sin 2x}{1+\cos 2x}dx = \int\left(1-\frac{6t}{1+t^2}\right):\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{t^2-6t+1}{1+t^2}:\left(\frac{2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2-6t+1}{2+2t^2}dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{t^2+1}{t^2+1}-\frac{6t}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(1-3\cdot\frac{2t}{t^2+1}\right)dt = \frac{t}{2}-\frac{3}{2}\ln\left(t^2+1\right)+c = \frac{tgx}{2}-\frac{3}{2}\ln\left((tgx)^2+1\right)+c$$

שאלה 2

פתור את האינטגרל הבא בעזרת הצבה טריגונומטרית $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.

פתרון

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}dx$$

נציב $x = \frac{\sin t}{2}$ ונקבל $dx = \frac{\cos t}{2}dt$

$$\sqrt{1-4x^2} = \sqrt{1-4\cdot\frac{\sin^2 t}{4}} = |\cos t|$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{\sin^2 t}{4\cos t}\cdot\frac{\cos t}{2}dt = \frac{1}{8}\int \sin^2 t\,dt = \frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{t}{16}-\frac{\sin 2t}{32} =$$

$$= \frac{t}{16}-\frac{\sin t\cos t}{16} = \frac{t-\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}}{16} = \frac{\arcsin 2x-2x\sqrt{1-4x^2}}{16}+c$$

שאלה 3

א. פתור את האינטגרל $\int \sin^6 5x\cos^3 5x\,dx$.

ב. פתור את האינטגרל $\int \sin^2 3x\cos^2 3x\,dx$.

פתרון

א. נציב $t=\sin 5x$ ואז $dt=5\cos 5x$.

$$\int \sin^6 5x\cos^3 5xdx=\frac{1}{5}\int \sin^6 5x\cdot\cos^2 5x\cdot(5\cos 5x)dx=\frac{1}{5}\int \sin^6 5x\cdot\left(1-\sin^2 5x\right)\cdot(5\cos 5x)dx$$

$$=\frac{1}{5}\int t^6\left(1-t^2\right)dt=\frac{1}{5}\int\left(t^6-t^8\right)dt=\frac{t^7}{35}-\frac{t^9}{45}+c=\frac{\sin^7 5x}{35}-\frac{\sin^9 5x}{45}+c$$

ב.

נשתמש בזהות $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

$$\int \sin^2 3x\cos^2 3xdx=\int(\sin 3x\cos 3x)^2dx=\frac{1}{2}\int \sin^2 6xdx$$

נשתמש בזהות $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

$$\frac{1}{2}\int \sin^2 6xdx=\frac{1}{2}\int\frac{1-\cos 12x}{2}dx=\frac{1}{4}x-\frac{\sin 12x}{48}.$$

<u>שאלה 4</u>

חשב את האינטגרלים המסוימים הבאים:

א. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sin x\sqrt{1-\cos x}dx$.

ב. $\int_0^{\pi}x\sin^3 x\cos^2 xdx$.

<u>פתרון</u>

א. נחשב תחילה את האינטגרל הלא מסוים $\int \sin x\sqrt{1-\cos x}dx$.

נציב $t=\cos x$ ואז $dt=-\sin xdx$.

$$\int \sin x\sqrt{1-\cos x}dx=-\int\sqrt{1-t}dt=-\int(1-t)^{\frac{1}{2}}dt=\frac{-2(1-t)^{\frac{3}{2}}}{-1\cdot 3}=\frac{2(1-t)\sqrt{1-t}}{3}$$

$$\frac{2(1-\cos x)\sqrt{1-\cos x}}{3}.$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sin x\sqrt{1-\cos x}dx=\left[\frac{2(1-\cos x)\sqrt{1-\cos x}}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$=\frac{2\left(1-\cos\frac{3\pi}{2}\right)\sqrt{1-\cos\frac{3\pi}{2}}}{3}-\frac{2\left(1-\cos\frac{-\pi}{2}\right)\sqrt{1-\cos\frac{-\pi}{2}}}{3}=0$$

ב.

נציב $t=-x+\pi$ ואז $dt=-dx$

$$\int_0^{\pi} x\sin^3 x\cos^2 x dx = -\int_{\pi}^{0}(-t+\pi)\sin^3(\pi-t)\cos^2(\pi-t)dt = \int_0^{\pi}(-t+\pi)\sin^3 t\cos^2 t dt$$

$$= -\int_0^{\pi} t\sin^3 t\cos^2 t dt + \pi\int_0^{\pi}\sin^3 t\cos^2 t dt$$

סה"כ נקבל

$$\int_0^{\pi} x\sin^3 x\cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^3 t\cos^2 t dt \Leftarrow \int_0^{\pi} x\sin^3 x\cos^2 x dx = -\int_0^{\pi} t\sin^3 t\cos^2 t dt + \pi\int_0^{\pi}\sin^3 t\cos^2 t dt$$

נשאר לחשב $\int_0^{\pi}\sin^3 x\cos^2 x dx$

נחשב תחילה את האינטגרל הלא מסוים $\int \sin^3 x\cos^2 x dx$.

נציב $t=\cos x$ ואז $dt=-\sin x dx$.

$$\int \sin^3 x\cos^2 x dx = -\int \sin^2 x\cos^2 x\cdot(-\sin x)dx = -\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\cdot(-\sin x)dx = -\int (1-t^2)t^2 dt =$$

$$= \int (t^4-t^2)dt = \frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3} = \frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}$$

סה"כ נקבל ש

$$\int_0^{\pi}\sin^3 x\cos^2 x dx = \left[\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{\cos^5 \pi}{5}-\frac{\cos^3 \pi}{3}-\left(\frac{\cos^5 0}{5}-\frac{\cos^3 0}{3}\right) = \frac{4}{15}$$

שאלה 5

מצא קירוב לאינטגרל $\int_1^4 e^{-x^2}dx$ עבור $n=5$.

א. בעזרת שיטת המלבנים.

ב. בעזרת שיטת הטרפז.