תרגיל

א) $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, 0, \ldots\right\}$

ב) $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \ldots\right\}$

ג) $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots\right\}$

האם קיימת פונקציה $f(z)$ אנליטית בעיגול היחידה כך ש$\{a_n\}$ ערכים של $f\left(\frac{1}{n}\right)$?

פתרון

א) סדרת נקודות: $\frac{1}{2n} \to 0$, $0 \in D$(עיגול היחידה). $f\left(\frac{1}{2n}\right) = 0$, $\Leftarrow$ לפי משפט היחידות $f(z) = 0$ בD. אבל $f(1) \neq 0$. סתירה - לכן לא קיימת פונקציה אנליטית $f(z)$ שמקיימת את התנאי..

ב) לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\frac{1}{2n} = f\left(\frac{1}{2n}\right)$, $\frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \in D$ $\Leftarrow$ לפי משפט היחידות $\forall z \in D$, $f(z) = z$, אבל $f(1) = \frac{1}{z} \neq 1$ - סתירה, לא קיימת פונקיה אנליטית f.

ג) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}$. $\frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. לפי משפט היחידות: $f(z) = \frac{z}{2+z}, z \in D$

תרגיל

f פונקציה בתחום D, $\{z_n\} \subseteq D$. סדרה מתכנסת של נקודות $z_n \to z_0 \in D$: $\forall_{n\in\mathbb{N}} f'(z_n) = 1$. מהי פונקציה $f(z)$?

פתרון

f אנליטית $\Leftarrow$ f' אנליטית בD $\Leftarrow$ לפי משפט היחידות $\forall_{z\in D} f'(z) = L$ $\Leftarrow$ $f(z) = z + L$.

$f(z) = \sin\frac{1}{1-z}$. בנקודות $\sin\frac{1}{1-z} = 0$, $\frac{1}{1-z} = \pi n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$z_n = L - \frac{1}{\pi n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \boxed{1} \in D$$

$$f(z_n)=0, \forall n\in\mathbb{N}$$

$\Leftarrow$ לפי משפט היחידות, $f(z)=\sin\dfrac{1}{1-z}\equiv 0$ - **טעות!**
$1\in\partial D$, לא $1\in D$ - מכיוון שזו לא נקודה פנימית של D, המשפט לא עובד.

תרגיל

f אנליטית בעיגול היחידה, המקיימת $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\leq e^{-n}$ $\forall_{n\in\mathbb{N}}$. צ"ל: $f(z)\equiv 0$

הוכחה

נניח בשלילה ש$f(z)\not\equiv 0$, ולכן ניקח $z_0=0$, היא אפס מסדר סופי k, שזה אומר שלכל $k>m\in\mathbb{N}$: $f^{(n)}(0)=0$, אבל $f^{(k)}(0)\neq 0$.
f אנליטית ולכן אפשר למצוא פיתוח טיילור שלה סביב $z_0=0$:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=\underbrace{z^k}_{\text{finite}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n+k)}(0)}{(n+k)!}z^n$$

נגדיר פונקציה $g(z)$:

$$f(z)=z^k\cdot g(z)$$

$g(z)$ פונקציה אנליטית כי שי טור טיילור מתכנס של פונציה זו.

$$g(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n+k)}(0)}{(n+k)!}\cdot 0^n=\frac{f^{(n+k)}(0)}{(n+k)!}\neq 0$$

נגדיר סדרת נקודות: $a_n=\frac{1}{n}$. לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $g\left(\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{n}\right)^k=f\left(\frac{1}{n}\right)$. מכאן $g\left(\frac{1}{n}\right)=n^k\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\left|g\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|n^k\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\leq n^k\cdot e^{-n}\xrightarrow[n\to 0]{}0$$

כלומר, קיבלנו $\left|g\left(\frac{1}{n}\right)\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, אבל $g(0)\neq 0$ $\Leftarrow$ סתירה, פונקציה לא רציפה $\Leftarrow$ לא אנליטית.

תרגיל

א) קיימת פונקציה אנליטית f בעיגול היחידה כך ש

$$f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$$

ב) קיימת פונקציה אנליטית f בעיגול היחידה כך ש

$$f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$$

פתרון

א) נגדיר פונקציה $g\left(z\right)=f\left(z\right)\cdot f\left(-z\right)-z$. על סדרת הפונקציות $z_n=\frac{1}{n}$ ו $g\left(z_n\right)=0$. לכן, לפי משפט היחידות, ב$\forall z\in D$, $g\left(z\right)=0$ $\Leftarrow$ $\underbrace{f\left(z\right)}_{\text{even}}\cdot\underbrace{f\left(-z\right)}_{\text{odd}}=z$ $\Leftarrow$ סתירה.

ב) $g\left(z\right)=f\left(z\right)\cdot f\left(-z\right)-z^2$. באופן זהה לסעיף א', נקבל

$$f\left(z\right)\cdot f\left(-z\right)=z^2$$

$$\left.\begin{array}{r} f\left(z\right)=iz \\ f\left(-z\right)=-iz \end{array}\right\}\Rightarrow f\left(z\right)\cdot f\left(-z\right)=z^2$$

נעשה פיתוח לטור טיילור:

$$f\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\qquad f\left(-z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^na_nz^n$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^na_nz^n\right)=z^2$$

$$a_0^2=0\Rightarrow a_0=0$$

$$a_0a_2-a_1^2+a_2a_0=1$$

$$a_1^2=-1\Rightarrow a_1=\pm i$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

תהי f אנליטית בטבעת $\{z | R_1 < |z-\alpha| < R_2\}$, C הוא מעגל ברדיוס $R_1 < r < R_2$.
אז הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$ מתכנס בטבעת וסכומו שווה ל$f(z)$

החלק $\sum_{n=0}^{-1} a_n (z-\alpha)^n$ נקרא <u>החלק הסינגולרי</u> של טור לורן. המקדם $a_{-1} = (z-\alpha)^{-1}$ נקרא <u>שארית</u> של f בנק' α.

$$\boxed{\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = a_{-1}\cdot 2\pi i}$$

$$a_{-1} = \mathrm{Res}(f,\alpha)$$

תרגיל

מצא טור לורן של הפונקציה

$$f(z) = (z-3)\sin\frac{1}{z+2}$$

סביב נקודה $z=-2$ וחשב את $\mathrm{Res}(f,-2)$

פתרון

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin\left(\frac{1}{z+2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left(\frac{1}{z+2}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+2)^{-2n-1}$$

ולכן

$$f(z) = (z-3)\sin\frac{1}{z+2} = ((z+2)-5)\sin\frac{1}{z+2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+2)^{-2n} - 5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+2)^{-2n-1}$$

$$\operatorname{Res}(f, -2) = a_{-1} = -5$$

(מהטיר השני, כאשר $n = 0$)

תרגיל

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(2-z)}$$

א) $D_1 = \{z | 0 < |z| < 1\}$

ב) $D_2 = \{z | 1 < |z| < 2\}$

פתרון

א)

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}$$

$|z| < 1$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

טור הנדסי.

$$-\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot z^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

$\Leftarrow$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z^{n+1}}$$

ב)

$$\frac{1}{2-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=-\sum_{n=0}^{m9}z^{-n-1}$$

$1<|z|<2$ כי $\frac{1}{2}<\left|\frac{1}{2}\right|<1$

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$