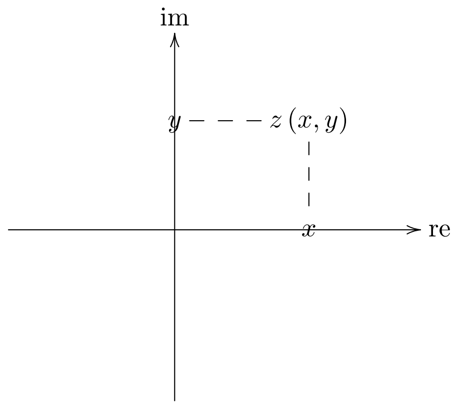
אתר הקורס: בmath-wiki.com - מידע כללי(תרגילים, ציונים וכו')

אתר_הקבוצה: u.math.biu.ac.il/~osharog - מה שקשור לקבוצת תרגול



$$z = x + iy \qquad i = \sqrt{-1}$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$\operatorname{Re}(z) = x \qquad \operatorname{Im}(z) = y$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

תרגיל

יש לפשט את הביטוי $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$

פתרון

$$\frac{(1+i)^9\cdot(1+i)^7}{(1-i)^7\cdot(1+i)^7}=\frac{(1+i)^{16}}{(2^7)}=\frac{\left((1+i)^2\right)^8}{2^7}=\frac{(2i)^8}{2^7}=\frac{2^8}{2^7}(i)^8=2$$

תרגיל

תארו את קבוצת הנקודות על המישור $\mathbb{C}$ המקיימות את אי־השוויון

$$|z-i|-|z+i|<2$$

פתרון

$$|z-i|<2+|z+i|$$

אי־שוויון המשולש:

$$|z-i|\leq 2+|z+i|$$

נחשב את $|z-i|\leq 2+|z+i|$ ונמחק מהמישור $\mathbb{C}$:

$$|x+i\,(y-i)|=2+|x+i\,(y+1)|$$

$$x^2+(y-1)^2=4+4\sqrt{x^2+(y+1)^2}=x^2+(y+1)^2$$

$$-4y-4=4\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

$$-y-1=\sqrt{x^2+(y+1)^2}\qquad(*)$$

$$\cancel{(-y-1)^2}=x^2+\cancel{(y+1)^2}$$

$$x^2=0$$

$$x=0$$

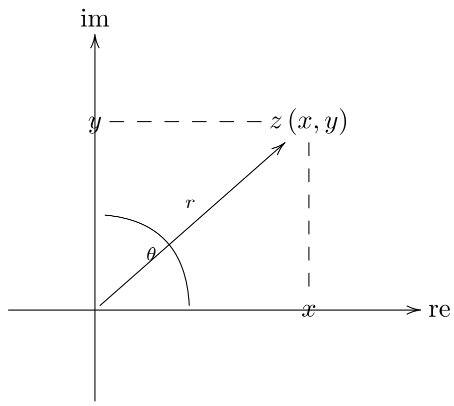
לכאורה ־ אנחנו פשוט מוחקים את ציר הx. אבל מהביטוי המסומן ב$(*)$ נובע $-y-1\geq 0\Leftarrow y\leq -1$, ולכן הפתרון הוא

$$\mathbb{C}\setminus\{x=0,y\leq -1\}$$

כלומר כל המישור פרט לחלק של ציר הy מתחת לנקודה $(0,-1)=-i$ כולל.

הצגה פולרית(קטבית)

$$z = x + iy$$



$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad r = |z|$$

$$\theta = \arg\left(\frac{y}{x}\right) = \arg(z)$$

$$\mathrm{Arg}\,(z) \in (-\pi, \pi]$$

הצגה של אויילר

$$z = re^{i\theta} = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

זוהי נוסחת אויילר

נוסחת דה מואבר

עבור n שלם:

$$z^n = r^n\,(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

ניתן להוכיח אותה באמצעות נוסחת אויילר או באמצעות אינדוקציה.
כאשר רוצים לעשות שורש, מקבלים n שורשים שונים:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i(\theta+2\pi k)}} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i} \qquad k = 0, 1, ..., n-1$$

תרגיל

מצא את כל הפתרונות של המשוואה $(z-1)^3 = -3$

פתרון

$$r = 3, \theta = \pi$$

$$-3 = 3 \cdot e^{i\pi}$$

ולכן

$$(z-1)^3 = 3 \cdot e^{i\pi}$$

$$(z-1) = \sqrt[3]{3} \cdot e^{i\left(\frac{\pi+2\pi k}{3}\right)} \qquad k = 0, 1, 2$$

$$z = 1 + \sqrt[3]{3} e^{i}$$

$$z_0 = 1 + \sqrt[3]{3} e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + \sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_1 = 1 + \sqrt[3]{3} \cdot e^{i\pi}$$

$$z_3 = 1 + \sqrt[3]{3} \cdot e^{i\frac{5}{3}\pi}$$

תרגיל

כמה פתרונות מרוכבים יש למשוואה $z^5 - \bar{z}^3 = 0$

פתרון

הפתרון הראשון - $\boxed{z = 0}$.

במקרה ש$z \neq 0$ $\Leftarrow$ $r \neq 0$, ואז:

$$z^5 = \bar{z}^3$$

$$z^5 \cdot z^3 = (\bar{z} \cdot z)^3$$

$$z^8 = |z|^6$$

$$r^8 \cdot e^{8i\theta} = r^6$$

$$r^2 \cdot e^{8i\theta} = 1$$

$$e^{i8\theta} = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} e^{i2\pi k}$$

$$\frac{1}{r^2} = 1 \Rightarrow \boxed{r = 1}$$

$$8\theta = 2\pi k$$

$$\theta = \frac{\pi k}{4}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

נצרף ל8 השורשים האלו את $z = 0$, וקיבלנו שיש 9 שורשים - 1 ממשי ו8 מרוכבים.

תרגיל

חשב את $\arg(z)$ ו$\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$ עבור:

א) $z_1 = -6 - 6i$

ב) $z_2 = -\pi$

ג) $z_3 = 10i$

פתרון

א) $\arctan\left(\frac{-6}{-6}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

$$\operatorname{Arg}(z_1) = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\arg(z_1) = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k = \frac{13\pi}{4} + 2\pi k = ...$$

ב) $\operatorname{Arg}(z_2) = -\arctan(-\pi)$

תרגיל

צייר את התחום:

$$A=\left\{z\in\mathbb{C}\middle|z\neq 0,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)\geq 0\right\}$$

$$B=\left\{z\in\mathbb{C}\middle|z\neq 0,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)\geq 1\right\}$$

$$C=\left\{z\in\mathbb{C}\middle|\frac{\pi}{4}\leq \mathrm{Arg}\left(z+i\right)\leq\frac{\pi}{2}\right\}$$

פתרון

א)

$$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}\Rightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{|z|^2}\mathrm{Re}\left(\bar{z}\right)=\frac{1}{|z^2|}\mathrm{Re}\left(z\right)$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)\geq 0\Rightarrow\frac{1}{|z|^2}\mathrm{Re}\geq 0\Rightarrow x\geq 0\wedge(x,y)\neq(0,0)$$

ב)

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)\geq 1\Rightarrow\frac{1}{|z|^2}\mathrm{Re}\left(z\right)\geq 1\Rightarrow x\geq x^2+y^2$$

$$x^2-x+y^2\leq 0$$

$$x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\leq 0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\leq\frac{1}{4}$$

ג)

$$t=z+i\qquad\frac{\pi}{4}\leq\mathrm{Arg}\left(t\right)\leq\frac{\pi}{2}$$

$$z=-i$$

$$t=0$$