[illegible] רציפות ורציפות במידה שווה:

1. תהי f ~~[illegible]~~ רציפה וחד-חד ערכית ב-$[a,b]$. הוכח ש-f מונוטונית.

2. f מוגדרת ב-$\mathbb{R}$, רציפה ב-0 ומקיימת $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ לכל x_1,x_2. הוכח ש $f(x)=cx$

3. $$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{x אי רציונלי} \\ \frac{1}{q} & x=\frac{p}{q} \quad \text{p,q זרים, q>0} \end{cases}$$
הוכח ש f רציפה עבור אי רציונלים

4. f רציפה ב $[a,\infty)$, קיים וסופי $\lim_{x\to\infty} f(x)$ אז f רבמ"ש ב $[a,\infty)$

5. f רציפה ב $[a,b)$ רבמ"ש $\iff$ קיים $\lim_{x\to b^-} f(x)$

6. f רציפה ב-$\mathbb{R}$ ומחזורית היא רבמ"ש.

מתוך הנ"ל אתן ~~[illegible]~~ מקווים לעשות לעשות תרגילים
3 ~~[illegible]~~ 1-5. כנראה שיעשו כמה שיותר מ- 1,2,4,6,10 בבררה.

7. הוכח $\frac{x}{1+e^x}$ רבמ"ש ב-$\mathbb{R}$

שמחה ושחר

<u>דרך פתרון</u>

1. בוחרים $x_1<x_2$. קיבל $fx_1<fx_2$ ולכן מונוטונית
בשלילה $x_3<x_4$, $f(x_3)>f(x_4)$ ומגיעים לסתירה.

2. $f(1)\overset{?}{=}c$ $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0) \Leftarrow f(0)=0$

n טבעי: $f(n)=f(1+1+\dots+1)=f(1)+f(1)+\dots+f(1)$
$=n\cdot c$

n שלם שלילי $f(n)+f(-n)=f(n-n)=f(0)=0$ ...

$x=\frac{1}{n}$ [illegible] $\cancel{x=\frac{m}{n}}$ ~~[illegible]~~ אז

$c=f(1)=f(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n})=n\cdot f(\frac{1}{n}) \Rightarrow f(\frac{1}{n})=c\cdot\frac{1}{n}$

$x=\frac{m}{n}$ בדומה. ולכל רציונלי x קיבלנו $f(x)=cx$

x אי רציונלי $q_n\to x$ בנוסף. $x-q_n\to 0$

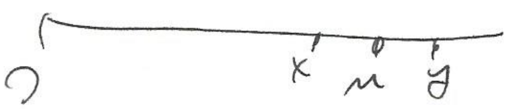
ולכן רציפות ב-0 $f(x-q_n)\to 0$ מצד שני

$f(x-q_n)=f(x)+f(-q_n)=$

לכן $f(x)=c\cdot x$ $=f(x)-\underbrace{q_n c}_{\downarrow\, xc}$

4. נניח $f(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}L$ יהי $\varepsilon>0$ יש M כך שלכל $x>M$

$|f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{3}$ בקטע $[0,M]$ רציפה במ"ש ובפרט רציפה ב-M



$|f(x)-f(y)|\le|f(y)-f(M)|$
$+|f(M)-f(x)|$

$|f(y)-f(M)|\le|f(y)-L|+|L-f(M)|$
$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}$

$f(x+T)=f(x)$ לכל $T>0$

5. לפי ש f רבמ"ש ב $[0,T]$

לכן לכל ε יש $\delta(\varepsilon)$ ב $[0,T]$ ומחזוריות של

להיות לכל קטע ~~[illegible]~~ מ-T. הכללי

7. קיים $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+e^x}=0$ לכן רבמ"ש ב $[0,\infty)$ לפי

נוכיח y לכל $x,y<0$

$$\left|\frac{x}{1+e^x}-\frac{y}{1+e^y}\right|=\left|\frac{x+xe^y-y-ye^x}{(1+e^x)(1+e^y)}\right|\le$$

$$\le|x-y|+|xe^y-ye^x|$$

נכתוב $y=x+y-x$ אז

$$|xe^y-ye^x|=|xe^x\cdot e^{y-x}-(x+y-x)\cdot e^x|=$$

$$=|xe^x(e^{y-x}-1)-(y-x)e^x|\le M\cdot|e^{y-x}-1|+|y-x|$$

$|xe^x|\le M$ לכל $x\le 0$

$|e^{y-x}-1|\to 0$ כאשר $y-x\to 0$

בגלל רציפות ב-0.