תרגיל 9

1. הוכיחו: הטענה הבאה שקולה ללמה של צורן: אם $\langle A, < \rangle$ היא קבוצה סדורה חלקית לא ריקה שלכל שרשרת עולה בה יש חסם מלעיל, אז לכל $a \in A$ יש $b \in A$ מקסימלי כך ש: $a \leq b$.

2. הוכיחו: תהי $(P, <)$ קבוצה סדורה בסדר מלא. אזי יש בתוכה תת קבוצה קופינלית $A \subseteq P$ כך ש $(A, <)$ סדורה היטב.

3. הוכיחו את הלמה של תוכי:
תהי D קבוצה לא ריקה של קבוצות, כך ש $B \in D$ אמ"ם כל תת קבוצה סופית של B היא איבר בD. אזי, יש בD איבר מקסימלי ביחס להכלה.

4. הוכיחו שקיימת קבוצה S של מספרים ממשיים המקיימת:
א. לכל $a \neq b \in S$, $a - b$ אי רציונלי.
ב. לכל $a \notin S$ יש $b \in S$ כך ש $a - b$ רציונלי.

5. הוכיחו שאקסיומת הבחירה שקולה לטענה הבאה: לכל קבוצה S של קבוצות לא ריקות זרות בזוגות, קיימת $A \subseteq \bigcup S$ כך שלכל $x \in S$, $|A \cap x| = 1$. קבוצה כזאת נקראת "קבוצה בוחרת".

6. הוכיחו ישירות כי הלמה של צורן גוררת את אקסיומת הבחירה.
רמז: לפי התרגיל הקודם מספיק להוכיח שהלמה של צורן גוררת את הטענה הבאה:
לכל S קבוצה של קוצות לא ריקות וזרות בזוגות, קיימת $A \subseteq S$ כך ש $|A \cap X| = 1$ לכל $X \in S$.

7. אחת מאקסיומות הנוספות השקולות לאקסיומת הבחירה היא "עיקרון המקסימום של האוסדורף" שאומר את הדבר הבא: בכל קבוצה סדורה חלקית לא ריקה קיימת שרשרת מקסימלית (ביחס להכלה). הוכיחו ישירות כי הלמה של צורן שקולה לעיקרון המקסימום של האוסדורף.