תורת הקבוצות תרגיל בית 5

1.א. הוכיחו: לכל 3 סודרים α,β,γ מתקיים: $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$.
ב. הפריכו: לכל 3 סודרים α,β,γ מתקיים: $(\beta+\gamma)\alpha=\beta\alpha+\gamma\alpha$.
פתרון:
א. $\alpha(\beta+\gamma)=type((\beta+\gamma)\times\alpha)$. כלומר, יש איזו סדר ל $(\beta+\gamma)\times\alpha$. בנוסף, $\beta+\gamma=type((\{0\}\times\beta)\cup(\{1\}\times\gamma))$. לכן, $\alpha(\beta+\gamma)$ איזומורפי סדר ל $((\{0\}\times\beta)\cup(\{1\}\times\gamma))\times\alpha=((\{0\}\times\beta)\times\alpha)\cup((\{1\}\times\gamma)\times\alpha)$.
מצד שני, $\alpha\beta+\alpha\gamma=type((\{0\}\times\alpha\beta)\cup(\{1\}\times\alpha\gamma))$. אבל, יש איזו' סדר מ$\alpha\beta$ ל $\beta\times\alpha$, ומ$\alpha\gamma$ ל $\gamma\times\alpha$. לכן, $\alpha\beta+\alpha\gamma$ איזומורפי ל $(\{0\}\times\beta\times\alpha)\cup(\{1\}\times\gamma\times\alpha)$.
לכן, $\alpha(\beta+\gamma)\cong\alpha\beta+\alpha\gamma$. ומכיוון שזה סודרים, זה אומר שהם שווים.
ב. נקח $\alpha=\omega,\beta=\gamma=1$. נקבל: $(1+1)\omega=2\omega=\omega\neq\omega+\omega$

2. הוכיחו: $\alpha\beta$ גבולי $\Longleftrightarrow$ α גבולי או β גבולי.
פתרון:
אם אחד מהסודרים הוא 0, המכפלה 0. (0 הוא סודר גבולי)
נניח ששניהם שונים מ0.
אם βגבולי אז הוכחתם בהרצאה ש $\alpha\beta$ גבולי.
אם β עוקב, אז $\beta=\gamma+1$ לאיזשהו סודר γ. ואז: $\alpha\beta=\alpha(\gamma+1)=\alpha\gamma+\alpha$. וזה גבולי אמ"ם α גבולי.

3. הוכח/ הפרך: עבור $\beta\neq 0$ מתקיים: הפו' הבאות מונוטוניות/רציפות/מונוטוניות ורציפות.
א. $f(\alpha)=\alpha+\beta$.
ב. $f(\alpha)=\alpha\beta$.
ג. $f(\alpha)=\beta\alpha$
פתרון:
א. הפרכה: הפו' לא מונוטונית, כי למשל, $1>0$, אבל $1+\omega=0+\omega$.
ולא רציפה, כי למשל אם נקח $\alpha=\omega$ ו$\beta=1$, אז $\omega+1\neq\sup\{n+1|n<\omega\}=\omega$.
ב. הפרכה: הפו' לא מונוטונית, כי למשל, $2>1$, אבל $2\cdot\omega=1\cdot\omega$.
ולא רציפה, כי למשל אם נקח $\alpha=\omega,\beta=2$, אז $\omega\cdot 2\neq\sup\{n\cdot 2|n<\omega\}=\omega$.
ג. הפו' מונוטונית ורציפה.
ראינו בתרגול ובהרצאה, שאם $\alpha_1<\alpha_2$ אז $\beta\alpha_1<\beta\alpha_2$.
ואם α גבולי, אז $\beta\alpha=\sup\{\beta\gamma|\gamma<\alpha\}$.

4. א. הוכיחו: לכל סודר α, $\alpha\cdot 2=\alpha+\alpha$
ב. הפריכו: לכל סודר α, $2\cdot\alpha=\alpha+\alpha$.
פתרון:
א. $\alpha\cdot 2=type(2\times\alpha)=type(\{0,1\}\times\alpha)=type((\{0\}\times\alpha)\cup(\{1\}\times\alpha))=\alpha+\alpha$.

ב. אותה הפרכה כמו ב1.ב