

תרגול 3

בחירת k מתוך n איברים:

יש חזרות	אין חזרות	סדר / חזרות
n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$	יש חשיבות לסדר
$\binom{n+k-1}{n-1}$	$\binom{n}{k}$	אין חשיבות לסדר

תרגילים:

תרגיל 1: בכמה דרכים ניתן לחלק n כדורים לבנים זהים ו- n כדורים צבעוניים בצבעים שונים ל- $2n$ תאים מובחנים כך שבכל תא:

- (א) לכל היותר כדור אחד.
- (ב) לכל היותר כדור לבן אחד.
- (ג) לכל היותר כדור צבעוני אחד.
- (ד) מספר שווה של כדורים לבנים וצבעוניים.

פתרון:

(א) $\frac{(2n)!}{n!}$ - חלוקת הכדורים הצבעוניים תקבע את חלוקת הכדורים הלבנים (הם יחולקו לתאים שנשארו ריקים). חלוקת n הצבעוניים ל- $2n$ התאים כך שלכל היותר כדור אחד בכל תא זו בדיוק בחירת n מתוך $2n$ תאים עם חשיבות לסדר וללא חזרות.

(ב) $\binom{2n}{n} \cdot \frac{(2n)^n}{n!}$ - אין הגבלה על מספר הכדורים הצבעוניים בתא, לכן זו בחירת n מתוך $2n$ תאים עם חשיבות לסדר ועם חזרות, כלומר $(2n)^n$. עבור הלבנים יש לבחור בדיוק n מתוך $2n$ תאים כך שבכל תא יהיה כדור לבן אחד, כלומר $\binom{2n}{n}$.

(ג) $\frac{(2n)!}{n!} \cdot \frac{(n+2n-1)}{2n-1}$ - חלוקת n הצבעוניים ל- $2n$ התאים כך שלכל היותר כדור אחד בכל תא זו בדיוק בחירת n מתוך $2n$ תאים עם חשיבות לסדר וללא חזרות, כלומר $\frac{(2n)!}{n!}$. עבור הלבנים הסדר של חלוקתם לתאים לא משנה (כי צבעם זהה), ואין מגבלה לגבי חזרות, כלומר $\frac{(n+2n-1)}{2n-1}$.

(ד) $(2n)^n$ - חלוקת הלבנים נקבעת ע"פ הצבעוניים (נצמיד לכל כדור צבעוני כדור לבן).

תרגיל 2:

סעיף א': בכמה דרכים ניתן לחלק 300 כדורים זהים ל-3 תאים מובחנים כך שבכל תא יהיו לא יותר מ-180 כדורים?

סעיף ב': בכמה דרכים ניתן לחלק 300 כדורים זהים ל-3 תאים מובחנים כך שבכל תא יהיו לא יותר מ-120 כדורים?

פתרון:

סעיף א':

סך כל הדרכים לחלוקת הכדורים לתאים הוא: $\binom{300+3-1}{3-1}$. מכיוון שיש רק 300 כדורים, לכל היותר בתא אחד יכולים להיות יותר מ-180 כדורים (האפשרות הפסולה). 3 דרכים לבחירת תא, ולכן מספר האפשרויות הפסולות הוא: $3 \cdot \binom{(300-181)+3-1}{3-1}$. סה"כ נקבל כי התשובה היא: $3 \cdot \binom{300+3-1}{3-1} - \binom{(300-181)+3-1}{3-1}$

סעיף ב':

כעת ישנה אפשרות של חריגה ביותר מתא אחד. בהמשך נראה כיצד פותרים זאת ע"י עקרון ההכלה וההדחה. כעת ניקח גישה שונה: נניח שבכל תא יש מראש 120 כדורים. בכמה דרכים ניתן להוציא מהם 60 כדורים (כך נישאר עם 300 כדורים סה"כ)? שאלה זו שקולה לחלוקה של 60 כדורים ל-3 תאים, לכן נקבל: $\binom{60+3-1}{3-1}$.

תרגיל 3: הוכיחו את הזהויות הבאות בדרך אלגברית ובדרך קומבינטורית:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \quad (\text{א})$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n} \quad (\text{ב})$$

פתרון:

(א) ניתן לרשום את הנוסחה כך:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{0} = \binom{2n}{n}$$

כעת נבחן את אגף ימין: יש לבחור n איברים מתוך $2n$. נחלק את $2n$ האיברים לשתי קבוצות זרות של n איברים. אז זה שקול לבחירה של מספר x כלשהו של איברים מקבוצה אחת ו- $n-x$ מהקבוצה השנייה, כאשר x נע בטווח $[0, n]$. כל האפשרויות האלה מיוצגות ע"י אגף שמאל ומכאן נכונות הנוסחה.

(ב) נניח שיש לנו $m+1$ אפסים ו- n אחדות לסדר בשורה. אגף ימין זו הנוסחה הישירה לחישוב זה. נבחן את אגף שמאל: נבודד ספרת 0 אחת שתהיה הסמן הימני, כלומר בכל בחירה נסתכל על ה-0 הימני ביותר. ישנן $m+1$ אפשרויות למספר האחדות שמשמאל לסמן הימני הזה. מ-0 ועד n (זו הסכימה באגף שמאל). למשל בדוגמא: 1 1 1 0 1 0 0 1 יש 2 אחדות משמאל לסמן הימני מסך 6 האחדות. ברגע שקבענו כמה אחדות משמאל לסמן הימני, נאמר k , נותר לקבוע את מיקומן – לקבוע סידור של k אחדות ו- m אפסים בשורה, כלומר $\binom{m+k}{k}$. מכאן שהנוסחה באגף שמאל מחשבת את אותו מספר הסידורים.

תרגיל 4: בכמה מהמספרים בעלי 7 ספרות, כל ספרה המופיעה במספר מופיעה לפחות 3 פעמים?

פתרון:

נבחין בין שני סוגי מספרים העונים על הדרישה:

סוג א': מספר המורכב מספרה אחת. ישנם 9 מספרים כאלה.

סוג ב': מספר המורכב משתי ספרות:

1. מספר המורכב משתי ספרות שאינן 0. ראשית נבחר את שתי הספרות: $\binom{9}{2}$. כעת יש שתי אפשרויות למספר המופעים של ספרה: 3 או 4, כיוון ששתיהן חייבות להופיע לפחות 3 פעמים, וזה קובע את מספר המופעים של הספרה האחרת. למשל ב-4433344 לספרה 4 ארבעה מופעים ולספרה 3 שלושה מופעים. ברור כי ישנן $\binom{7}{4}$ אפשרויות לקבוע את מיקום הספרות.
2. מספר המורכב משתי ספרות כשאחת מהן היא 0. אז יש 9 אפשרויות לבחור את הספרה השנייה. כעת, הספרה השמאלית ביותר לא יכולה להיות 0. נותר לקבוע את מיקומה בין ששת המקומות הנותרים: אם 0 מופיעה 3 פעמים נקבל $\binom{6}{3}$, ואם 0 מופיעה 4 פעמים נקבל $\binom{6}{4}$.

נקבל סה"כ $\binom{9}{2} \cdot 2 \cdot \binom{7}{4} + 9 \cdot \left(\binom{6}{3} + \binom{6}{4} \right)$ דרכים לבניית מספרים מסוג ב'.

בסה"כ קיבלנו: $9 + \binom{9}{2} \cdot 2 \cdot \binom{7}{4} + 9 \cdot \left(\binom{6}{3} + \binom{6}{4} \right)$ מספרים העונים על הדרישה.

תרגיל 5: כמה מלים בנות 9 אותיות ניתן לרשום ע"י $\{a, a, a, b, b, b, c, d, e\}$ ובכמה מהן האותיות c, d סמוכות?

פתרון:

אם נתייחס לכל 9 האותיות כשונות, ישנן $9!$ מלים. אבל כל סידור כלשהו של מופעי a ספרנו כך 6 פעמים ולכן צריך לחלק ב-6. באותו אופן צריך לחלק ב-6 עבור b. נקבל סה"כ: $\frac{9!}{6 \cdot 6} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 10080$.

כעת, אם c, d סמוכות, לסידור ביניהן יש שתי אפשרויות. כעת נתייחס אליהן כספרה אחת ונקבל את הבעיה: כמה מלים בנות 8 אותיות ניתן לרשום ע"י $\{a, a, a, b, b, b, x, e\}$ (כאשר x מסמל את c, d הסמוכות)

בחישוב דומה נקבל כאן $\frac{8!}{6 \cdot 6} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 1120$ ובסה"כ יש $2 \cdot 1120 = 2240$ מלים כנדרש.

תרגיל 6: מהו מספר הדרכים השונות לבחור n עצמים מתוך $2n$ עצמים, כאשר n מתוכם זהים והשאר שונים זה מזה?

פתרון:

אם בחרנו k מהעצמים השונים אז שאר ה- $(n-k)$ עצמים הם מהעצמים הזהים. לכן נקבל: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

תרגיל 7: בכמה דרכים ניתן להגיע מראשית הצירים לנקודה (m, n) ברביע הראשון, כאשר בכל שלב ניתן להתקדם צעד אחד מזרחה או צעד אחד צפונה?

פתרון:

כל דרך כזו כוללת בהכרח בדיוק m צעדים מזרחה ו- n צעדים צפונה. לכן נותר לקבוע את מיקומי m הצעדים מזרחה בסדרת $m+n$ הצעדים. מכאן נקבל: $\binom{m+n}{m}$ דרכים אפשריות.

תרגיל 8:

- (א) חשבו את מספר המחלקים של 980,000.
 (ב) חשבו את מספר המחלקים המשותפים של 15^5 ו-360,000.

פתרון:

- (א) נפרק את המספר לגורמים ראשוניים ונקבל את המולטי-קבוצה: $\{2, 2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5, 7, 7\}$. כעת כל מחלק אפשרי הוא איזושהי כפולה של איברים מהקבוצה (ואלה כל המחלקים האפשריים), ונקבל: $6 \cdot 5 \cdot 3 = 90$ מחלקים אפשריים. הסבר: הגורם 2 יכול להופיע בחזקה שבטווח $[0, 5]$ ובאופן דומה הגורמים הראשוניים האחרים.
 (ב) הגורמים הראשוניים של 15^5 : $\{3, 3, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5\}$. הגורמים הראשוניים של 360,000: $\{2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 5, 5\}$. החיתוך בין המולטי-קבוצות הוא: $\{3, 3, 5, 5, 5, 5\}$ ובחישוב דומה ל-א' נקבל $3 \cdot 5 = 15$ מחלקים משותפים.

תרגיל 9: יהי \mathbb{F} שדה סופי בעל q איברים.

- (א) כמה פולינומים בעלי דרגה n יש מעל \mathbb{F} ?

(ב) כמה פולינומים בעלי דרגה n המתאפסים בנקודה $x=2$ יש מעל \mathbb{F} ?

פתרון:

(א) יש $n+1$ חזקות של x בפולינום: $a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$. לכל a_i יש q אפשרויות (איברי השדה) פרט ל- a_n עבורו יש $q-1$ אפשרויות – 0 אינו אפשרות כי הפולינום מדרגה n . נקבל

$$q^n \cdot (q-1)$$

(ב) פולינום מהצורה הנ"ל מתאפס בנקודה $x=2$ אם ניתן להציגו בצורה:
 $(x-2)(b_0x^0 + b_1x^1 + \dots + b_{n-1}x^{n-1})$ כאשר $b_{n-1} \neq 0$. לכן נקבל $q^{n-1} \cdot (q-1)$ פולינומים אפשריים כנדרש.

תרגיל 10:

(א) מה מספר הדרכים לסדר n אנשים במעגל? (שני סידורים זהים אם ניתן להגיע ע"י סיבוב מהאחד לשני)

(ב) מה מספר הדרכים לסדר n זוגות נשואים במעגל כך שכל זוג ישב יחד?

פתרון:

(א) שתי דרכים לפתרון:

1. נבחר אדם אקראי שישמש ציר (הוא לא נחשב לספירה – הספירה מתחילה ממי שנבחר להיות משמאל לו). כעת נתחיל לסדר את האנשים משמאל לו, עד שנבחר את האדם האחרון שיסגור את המעגל ויהיה מימין לציר. נקבל סה"כ: $(n-1)!$ סידורים.

2. יש $n!$ אפשרויות לסדר n אנשים בשורה. אך אם נסגור את השורה למעגל, נקבל שעד-כדי סיבובים יש לכל מעגל n שורות מקור שיוצרות אותו, ולכן נחלק ב- n . נקבל סה"כ:

$$(n-1)! = \frac{n!}{n}$$

(ב) לכל זוג נשוי יש 2 סידורים פנימיים אפשריים (בעל, אישה) או (אישה בעל), לכן מסעיף א' נקבל:

$$2^n \cdot (n-1)!$$

תרגיל 11: בכמה דרכים ניתן לבחור 8 קלפים מחבילת קלפים רגילה (52 קלפים) כך ש:

(א) בחרנו ארבעה נסיכים?

(ב) בחרנו ארבעה נסיכים ולפחות שני אסים?

(ג) בחרנו בדיוק נסיך אחד, מלכה אחת, מלך אחד ואס אחד?

פתרון:

(א) נשאר לבחור 4 קלפים מתוך 48, כלומר: $\binom{48}{4}$.

(ב) נפרק למקרים:

1. בחרנו בדיוק 2 אסים: $\binom{4}{2} \binom{44}{2}$.

2. בחרנו בדיוק 3 אסים: $\binom{4}{3} \binom{44}{1} = 44$.

3. בחרנו 4 אסים: אפשרות 1 (בחרנו כבר 8 קלפים).

סה"כ נקבל: $\binom{4}{2} \binom{44}{2} + \binom{4}{3} \binom{44}{1} + 1$ דרכים.

(ג) יש 4 אפשרויות לבחור נסיך אחד, 4 עבור מלכה אחת, 4 עבור מלך אחד ו- 4 עבור אס אחד. נשאר לנו לבחור 4 קלפים מתוך 36 (כל הקלפים בטווח $[2,10]$ כאשר יש 4 קלפים

$$4^4 \cdot \binom{36}{4}$$

תרגיל 12: בכמה דרכים ניתן לסדר בשורה m כדורים לבנים ו- n כדורים שחורים, כך שלא יהיו שני כדורים שחורים סמוכים?

פתרון:

ראשית, מעקרון שובך היונים ניתן לראות כי אם $n > m + 1$ הסידור בלתי אפשרי (יונים = כדורים שחורים, שובכים = רווחים בין כדורים לבנים כולל לפני הראשון ואחרי האחרון).

כעת נגדיר את הרווחים בין הכדורים השחורים כתאים: $n+1$ תאים. אנו צריכים לפזר את m הכדורים הלבנים בין התאים כך שלא יהיו תאים ריקים, פרט (אולי) לתא הראשון והאחרון. ראשית נפזר כדור לבן אחד לכל אחד מהתאים פרט לקיצוניים ונישאר עם $m-(n-1)$ כדורים. כעת אין מגבלה על פיזור שאר הכדורים כיוון שסיפקנו את האילוץ הנתון. אז נותרנו עם הבעיה: כמה פתרונות טבעיים למשוואה:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = m - (n - 1) ?$$

אנו כבר יודעים לפתור זאת (נוסחת "אין חשיבות לסדר, יש חזרות"). נקבל: $\binom{(n+1)+(m-(n-1))-1}{(n+1)-1}$

תרגיל 13: שיכור מטייל על ציר המספרים כאשר בכל שלב הוא עובר מנקודה k לאחת משתי הנקודות $k+1$ או $k-1$.

- (א) מהו מספר המסלולים האפשריים ב- n שלבים?
 (ב) כמה מתוכם יחזירו אותו לנקודת ההתחלה?
 (ג) חזרו על שני הסעיפים הקודמים כאשר השיכור מטייל על המישור, ובכל שלב עובר לאחת מארבעת הנקודות הסמוכות.

פתרון:

- (א) בכל שלב יש שתי אפשרויות, לכן יש 2^n מסלולים.
 (ב) n בהכרח זוגי, ויש $\frac{n}{2}$ שלבים מכל סוג. נשאר לקבוע את מיקומי המעברים מסוג אחד בסדרת n השלבים, כלומר $\binom{n}{n/2}$ אפשרויות.
 (ג) בסעיף א' נקבל 4^n מסלולים.
 עבור סעיף ב': כל צעד מזרחה מחייב צעד חזרה מערבה (במקום כלשהו בסדרת הצעדים), וכל צעד צפונה מחייב צעד חזרה דרומה. נבחר ראשית את מספר הצעדים מזרחה: בין 0 ל- $\frac{n}{2}$. אם מספר הצעדים מזרחה נבחר להיות x , אז נשארו $n-2x$ עבור צעדים צפונה ודרומה. כמו-כן צריך לקבוע את מיקום הצעדים מארבעת הסוגים. לכן נקבל:

$$\sum_{i=0}^{n/2} \binom{n}{i} \binom{n-i}{i} \binom{n-2i}{(n-2i)/2}$$

הסבר:

- לאחר שבחרנו כמה צעדים יש מזרחה – i – נבחר את מיקומם: $\binom{n}{i}$.
 מתוך המקומות הנותרים נבחר את מיקום i הצעדים המשלימים מערבה: $\binom{n-i}{i}$.
 מתוך המקומות הנותרים נבחר את מיקום $(n-2i)/2$ הצעדים צפונה: $\binom{n-2i}{(n-2i)/2}$.
 המקומות הנותרים הם בהכרח מיקומי הצעדים המשלימים דרומה.

פתרון נוסף לסעיף זה (עבור חלק ב'):

כמובן n בהכרח זוגי כמו בטיולים בציר שחוזרים לנקודת ההתחלה. תהי A קבוצת הצעדים שבהם השיכור זז צפונה או מזרחה. אז $|A| = n/2$ ולכן יש $\binom{n}{n/2}$ אפשרויות עבור הקבוצה A (קבוצה של $n/2$ מיקומים בסדרה באורך n). עכשיו תהי B קבוצת הצעדים שבהם השיכור זז צפונה או מערבה. אז גם $|B| = n/2$ ולכן יש $\binom{n}{n/2}$ אפשרויות עבור הקבוצה B . הבחירות של A ו- B בלתי-תלויות לחלוטין, לכן יש $\binom{n}{n/2}^2$ דרכים לבחור בשתי הקבוצות האלה. אבל A ו- B ביחד קובעות את המסלול: השיכור זז צפונה במיקומים $A \cap B$, מזרחה במיקומים $A \setminus B$, מערבה במיקומים $B \setminus A$, ודרומה בשאר המיקומים. לכן התשובה היא $\binom{n}{n/2}^2$.