אלגברה מופשטת 3 – חבורות גלואה - 01

1. כתבו במפורש את האוטומורפיזמים של $F\left(\sqrt[3]{2}\right)$ מעל F (בדקו קודם כמה יש) כאשר:
   i. $F=\mathbb{Q}\left(\rho_3\right)$
   ii. $F=\mathbb{Q}\left(\sqrt[6]{2}\right)$

2. יהי E/K שדה פיצול של פולינום $f(x)\in K[x]$ ספרבילי.
הוכיחו: אם $Gal(E/K)$ פועלת טרנזיטיבית על שורשי $f(x)$ אזי $f(x)$ אי-פריק מעל K.

3. נתונים $f\left(x\right)\in\mathbb{Q}\left[x\right]$ פולינום אי-פריק מדרגה 3, ו-$E/\mathbb{Q}$ שדה הפיצול שלו.
הראו שאם יש ל-$f\left(x\right)$ שורש מרוכב $\alpha\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ אזי $Gal\left(E/\mathbb{Q}\right)=S_3$.

4. יהי $F=\mathbb{Z}_p\left(t\right)$. הראו שהפולינום $f\left(x\right)=x^p-t$ אי-פריק (ללא שימוש בהכללה של משפט איזנשטיין, ואם אתם משתמשים בטיעון שאין איבר $q\in F$ כך ש $q^p=t$, יש להוכיח זאת).
מצאו את שדה הפיצול E/F של $f\left(x\right)$ וחשבו את מימד ההרחבה.
חשבו את $Gal\left(E/F\right)$.

5. הראו שאם $E\supseteq B\supseteq F$ שדות ו-E/F הרחבת גלואה, אזי E/B היא הרחבת גלואה.

6. הוכיחו:
   i. כל הרחבה ממימד 2 של שדה עם מאפיין שונה מ-2 היא הרחבת גלואה.
   ii. היחס "ההרחבה היא הרחבת גלואה" אינו טרנזיטיבי; כלומר, אם $E/B,\ B/F$ הרחבות גלואה אזי E/F לא בהכרח הרחבת גלואה (מצאו דוגמה נגדית).

7. מצאו את חבורת גלואה של x^4+1 מעל $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ והציגו את פעולת החבורה על השורשים כתמורות.

8. יהי $f\left(x\right)=x^4-10x^2+1\in\mathbb{Q}\left[x\right]$.
   i. הראו ש $f\left(x\right)$ הוא פולינום מינימלי של $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ בעזרת חבורת גלואה $Gal\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)/\mathbb{Q}\right)$.
   ii. הציגו את פעולת חבורת גלואה על השורשים של $f\left(x\right)$ כתת-חבורה של של S_4.
   iii. הראו של-$f\left(x\right)$ ו-$g\left(x\right)=\left(x^2-2\right)\left(x^2-3\right)\in\mathbb{Q}\left[x\right]$ יש את אותו שדה פיצול ואותה חבורת גלואה, אך חבורת הגלואה פועלת אחרת על שורשיהם.

9. יהי $f\left(x\right)\in\mathbb{Q}\left[x\right]$ פולינום אי-פריק, ויהי $E/\mathbb{Q}$ שדה הפיצול שלו.

הוכיחו: אם חבורת גלואה $Gal\left(E/\mathbb{Q}\right)$ אבלית אז $E=\mathbb{Q}\left[a\right]$ לכל שורש $a\in E$ של $f(x)$.

רמז: התבוננו ב $Gal(E/\mathbb{Q}[a])$.