אי-שוויונים

1. מהי גדולה יותר $\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x}dx$ או $\frac{3\pi}{2}$?

2. פונקציה $f(x)$ גזירה רציף וקמורה למעלה המקיימת $0<f'(1)<2f(1)$.

הוכח: $\int_0^1 f(x)dx>0$.

3. הוכח: במשולש שזוויותיו α,β,γ מתקיים אי-שוויון

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{3}{2}$$

4. הוכח אי-שוויון

$$(a+b)^{\alpha}\le 2^{\alpha-1}(a^{\alpha}+b^{\alpha})$$

עבור $\forall a,b\ge 0$, $\alpha\ge 1$

5. הוכח אי-שוויון $a^{\alpha}-b^{\alpha}\le(a-b)^{\alpha}$ עבור $a\ge b$, $0\le\alpha\le 1$.

6. הוכח אי-שוויון $1+2\ln x\le x^2$, עבור $x>0$.

7. הוכח אי-שוויון $\frac{\ln x}{x-1}\le\frac{1}{\sqrt{x}}$ עבור $x>0$, $x\ne 1$

8. הוכח אי-שוויון $\frac{\operatorname{tg}x}{x}>1+\frac{1}{3}x^2$ עבור $0<x<\frac{\pi}{2}$

9. הוכח אי-שוויונים הבאים:

א) $$\frac{4}{9}(e-1)<\int_0^1\frac{e^x dx}{(x+1)(2-x)}<\frac{1}{2}(e-1)$$

ב) $$\frac{e^2-1}{12}<\int_0^1\frac{e^{2x}dx}{x^2-5x+6}<\frac{e^2-1}{4}$$

ג) $$\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi+2}{2}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x(x+1)}dx<\ln\frac{\pi+2}{2}$$

ד) $$\sin 1<\int_{-1}^{1}\frac{\cos x}{1+x^2}dx<2\sin 1$$

10. נתון פולינום $P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+1$ בעל n שורשים ממשיים ולכל מקדמיו שלו חולקים. הוכח: $P_n(2)\ge 3^n$.