

תרגיל 9

2 בפברואר 2017

1. תהינה A, B, C קבוצות, $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ פונקציות. הוכח או הפרד:

- אם ההרכבה $g \circ f$ על אז g על.
- אם ההרכבה $g \circ f$ על אז f על.
- אם ההרכבה $g \circ f$ חח"ע אז g חח"ע.
- אם ההרכבה $g \circ f$ חח"ע אז f חח"ע.

פתרון:

א. נראה ש- g על: יהי $c \in C$, $c = g \circ f(a)$ על ולכן קיים $a \in A$ כך ש- $g(f(a)) = c$.
 $g \circ f(a) = c$, והמקור של c תחת g הוא $f(a)$.

ב. f לא בהכרח על, למשל: נגדיר $A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{1\}$ ונגדיר שתי פונקציות $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ ע"י: $f(1) = 1, g(1) = g(2) = 1$. ב- C יש רק איבר אחד שמקורו 1, אבל f לא על.

ג. לא בהכרח. אותה דוגמא בדיוק כמו סעיף ב.

ד. נראה ש- f חח"ע: נניח בשלילה שיש $x \neq y \in A$ כך ש- $f(x) = f(y)$, אזי נקבל ש- $g(f(x)) = g(f(y))$ כי g פונקציה ובפרט חד ערכית. ובסה"כ קיבלנו שההרכבה לא חח"ע בסתירה לנתון.

2. תהינה A, B קבוצות לא ריקות. הוכיחו כי קיימת פונקציה חח"ע $f : A \rightarrow A \times B$.

פתרון:

נבחר $b \in B$ (קיים כזה כי $B \neq \emptyset$), ונגדיר את הפונקציה ע"י: $f(a) = (a, b)$.
הפונקציה חח"ע כי אם $a_1 \neq a_2 \in A$ אז $f(a_1) = (a_1, b) \neq (a_2, b) = f(a_2)$, לפי הגדרת המכפלה בין קבוצות וזוגות סדורים. וזו בדיוק אומר שהפונקציה חח"ע.

3. האם הפונקציות הבאות הן חח"ע? על?

א. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ המוגדרת ע"י $f(n) = |n|$.

ב. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = x^3$.

ג. $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(q) = e^q$.

ד. תהי A קבוצה ו- $f : P(A) \rightarrow P(A)$ פונקציה המוגדרת לפי $f(B) = A \setminus B$.
ה. תהי A קבוצה לא ריקה, $B \subset A$ (מוכל ממש) תת קבוצה, ו- $f : P(A) \rightarrow P(B)$ פונקציה המוגדרת לפי $f(C) = C \cap B$.
ו. תהי A קבוצה לא ריקה, $B \subset A$ (מוכל ממש) תת קבוצה, ו- $f : P(B) \rightarrow P(A)$ פונקציה המוגדרת לפי $f(C) = C \cup (A \setminus B)$.

פתרון:

א. על (כל איבר טבעי או אפס הוא המקור של עצמו). לא חח"ע כי $f(1) = f(-1)$.
ב. חח"ע ועל (תתבוננו בגרף של הפונקציה ותבינו).
ג. חח"ע כי אם $e^{q_1} = e^{q_2}$ אז $q_1 = q_2$. לא על כי למשל ל- $e^{\sqrt{2}}$ אין מקור כי $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

ד. נתייחס ל- A כקבוצה האוניברסלית לתרגיל זה. חח"ע: אם $C \neq D$ אז באחת הקבוצות יש איבר שאין בשניה. נניח לצורך העניין (קוראים לזה "בלי הגבלת הכלליות" וכותבים בה"כ) שקיים $x \in C \setminus D$ ולכן $x \in D^c \setminus C^c$ ולכן $C^c \neq D^c$, וזאת אומרת ש- f חח"ע. על: תהי $B \in P(A)$, אזי $f(B^c) = B$ ומצאנו מקור, ולכן היא גם על.
ה. חח"ע: לא, כי $f(A) = f(B) = B$. על: כן: לכל $C \in P(B)$ היא המקור של עצמה (כי $f(C) = C \cap B = C$).
ו. נתייחס ל- A כקבוצה האוניברסלית לתרגיל זה. חח"ע: כן: אם $C \neq D \in P(B)$ אז בה"כ קיים $x \in C \setminus D$ ולכן $x \in (C \cup B^c) \setminus (D \cup B^c)$ ולכן $x \in f(C) \setminus f(D)$ ולכן $f(C) \neq f(D)$ ולכן f חח"ע. על: לאו דוקא, אם ב- B^c יש לפחות שני איברים שונים, נסמנם x, y , אזי ל- $\{x\}$ אין מקור.

4. תהיינה A, B קבוצות, $f : A \rightarrow B$ פונקציה חח"ע ועל. הראינו בתרגול שזה גורר ש- f הפיכה, ע"י שהגדרנו $g : B \rightarrow A$ המתאימה לכל $b \in B$ את המקור (שקיים כי f על) היחיד (כי f חח"ע) שלו. הראו ש- g הופכית של f .

פתרון:

יהי $a \in A$ צ"ל ש- $g \circ f(a) = a$: לפי הגדרה $g \circ f(a) = g(f(a))$, נסמן $f(a) = b$, אזי הגדרנו בתרגול שעבור b שהמקור שלו ע"י f הוא a אז $g(b) = a$ (וזו הגדרה טובה, כלומר הפונקציה יוצאת מלאה וחד ערכית, כי הוא קיים ויחיד), ולכן $g(f(a)) = a$.
באותו אופן בכיוון השני, אם $b \in B$ אז $g(b)$ מוגדר להיות המקור היחיד של b מ- A , שזה איבר שידוע שקיים והוא $a \in A$ היחיד המקיים $f(a) = b$. ולכן $f(g(b)) = b$.