83-116-תרגיל 2-פתרון:

1. נתונה הקבוצה $A=\{1,3,\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$

$2\notin A,\ \ \{1\}\subset A,\ \ \{2\}\not\subset A,\ \ \{1,2\}\in A,\ \ \{1,2\}\not\subset A,\ \ \{1\}\in A,\ \ \{\{1,2\}\}\subset A,\ \ \{1,\{1,2\}\}\subset A$

2.

א. $\{1,2\}\in\{1,2,\{1\}\}$-לא נכון,אין בקב' איבר כזה

ב. $\phi\in\{\phi,a\}$-נכון,זהו האיבר הראשון

ג. $\phi\subset\{\phi,a\}$-נכון כי נכון עבור כל קב' כפי שהוכח בכיתה

ד. תהי $A=\{\phi,\{\phi,\{\phi\}\}\}$.

(1)איברי A שאינם קב' חלקיות של A: $\{\phi,\{\phi\}\}$

(2)קבוצות חלקיות של A שאינם איברי A: $\{\phi\},\{\{\phi,\{\phi\}\}\},A$

(3)איברי A שהם גם קב' חלקיות שלה: $\phi$

3.

א. $A\in B=\{A,1\}\in C=\{B,2\}\Rightarrow A\notin C$

ב. $A=\{1\},B=\{A,1\}\Rightarrow A\in B\wedge A\subseteq B$

4.C,B,A קבוצות.

א. $A\in B\wedge B\subseteq C\Rightarrow A\in C$

נכון. הוכחה:

*נתון*: $B\subset C\Rightarrow \forall x\in B\ \ x\in C$

*בפרט נתון*: $A\in B$

*לכן*: $A\in C$

ב. $A\in B\wedge B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$

לא נכון. דוגמא נגדית:

$A=\{3\},B=\{A,1\},C=\{A,1,2)\Rightarrow A\in B\subseteq C\wedge A\not\subset C$

*כי*: $3\notin C$

5.א. נתונות הקב' $A=\{\{\phi\},\{1\}\},B=\{A,1,\phi\}$.

$\phi\notin A$

$\{\phi\}\in A\wedge\{\phi\}\notin B\Rightarrow A\not\subset B$

$A\in B$

ב.נתונות הקב' $A=\{1,3,5,7\},B=\{1,2,4,5,6\},C=\{2,4,6,8\}$

$B\cap A=\{1,5\},\ \ A\cup B=\{1,3,5,7,2,4,6\},\ \ B\cap C=\{2,4,6\},\ \ A\setminus B=\{3,7\},\ \ A\Delta B=\{3,7,2,4,6\}$

$(A\cup B)\setminus C=\{1,3,5,7\}$ ,

6. יהיו B,A קבוצות.

א. $A\cap(A\cup B)=A$

| **A** | B | $A\cup B$ | $A\cap(A\cup B)$ |
|---|---|---|---|
| **T** | T | T | **T** |
| **T** | F | T | **T** |
| **F** | T | T | **F** |
| **F** | F | F | **F** |

הוכחה פורמלית:

$\supseteq$: $x\in A\cap(A\cup B)\Rightarrow x\in A\wedge x\in(A\cup B)\Rightarrow x\in A\Rightarrow A\supseteq A\cap(A\cup B)$

$\subseteq$: $x\in A\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow x\in A\wedge x\in(A\cup B)\Rightarrow x\in A\cap(A\cup B)\Rightarrow A\subseteq A\cap(A\cup B)$

לכן: $A=A\cap(A\cup B)$

ב. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

| A | B | C | $B\cup C$ | $A\bigcap(B\cup C)$ | $A\cap B$ | $A\cap C$ | $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | **T** | T | T | **T** |
| T | T | F | T | **T** | T | F | **T** |
| T | F | T | T | **T** | F | T | **T** |
| T | F | F | F | **F** | F | F | **F** |
| F | T | T | T | **F** | F | F | **F** |
| F | T | F | T | **F** | F | F | **F** |
| F | F | T | T | **F** | F | F | **F** |
| F | F | F | F | **F** | F | F | **F** |

הוכחה פורמלית:

$\subseteq$: $x\in A\cap(B\cup C)\Rightarrow x\in A\wedge x\in(B\cup C)\Rightarrow x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)\Rightarrow$

$$\begin{cases} x\in B \text{ אם } \Rightarrow x\in A\wedge x\in B\Rightarrow x\in A\cap B \\ \\ x\in C \text{ אם } \Rightarrow x\in A\wedge x\in C\Rightarrow x\in A\cap C \end{cases} \Rightarrow x\in A\cap B\vee x\in A\cap C\Rightarrow x\in(A\cap B)\bigcup(A\cap C)\Rightarrow$$

$A\cap(B\cup C)\subseteq x\in(A\cap B)\bigcup(A\cap C)$

$\supseteq$: $x\in(A\cap B)\bigcup(A\cap C)\Rightarrow x\in(A\cap B)\vee x\in(A\cap C)\Rightarrow(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)\Rightarrow$

בכל מקרה: $x\in A$ ואז: $(x\in B\vee x\in C)$ $\Rightarrow x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)\Rightarrow x\in A\cap(B\cup C)\Rightarrow$

$A\cap(B\cup C)\supseteq x\in(A\cap B)\bigcup(A\cap C)$

לכן: $A\cap(B\cup C)=x\in(A\cap B)\bigcup(A\cap C)$

ג. $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$

$$x \in A^c \cap B^c \Leftrightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow \underset{\text{כי לא שייך לאף אחת מהן}}{x \notin A \cup B} \Leftrightarrow x \in (A \cup B)^c$$

$$\Downarrow$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

שימו לב, במקרה זה כל הגרירות דו כיווניות ולכן הוכחנו את שני כיווני ההוכחה יחד. אין זה המצב ברב המקרים, לכן הוכיחו ראשית כיוון אחד ורק אז בדקו <u>ביתר זהירות</u> האם הגרירה בכיוון ההפוך נכונה.

7.יהיו $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, A = \{2,4,6,8\}, B = \{1,2,4,5,6\}, C = \{1,3,5,7\}$ ($U$-הקב' האוניברסלית).

מצא:
$$\phi^c = U,\ \ U^c = \phi,\ \ C^c = A,\ \ A \setminus B = \{8\},\ \ B \setminus A = \{1,5\},\ \ (A \cup C) \setminus (C \setminus A)^c = C,$$
$$(A \cup B)^c \cap (B \cup C)^c = \phi,\ \ (A \cup B) \setminus C = A$$

8.הוכח בעזרת פעולות על קבוצות את הזהויות הבאות:

א.

$$(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C^c \cap D) \cup (A^c \cap B) = B \cap ((\underline{\underline{A}}) \cup (A \cap C^c \cap D) \cup \underline{\underline{(A^c)}}) = B \cap U = B$$

ב.

$$A \cap (B \Delta C) = A \cap ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) = (A \cap (B \setminus C)) \cup (A \cap (C \setminus B)) = (A \cap (B \cap C^c)) \cup (A \cap (C \cap B^c))$$
$$= ((A \cap B) \cap C^c) \cup ((A \cap C) \cap B^c) = ((A \cap B) \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B)$$
$$= ((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \underset{\uparrow \text{חשבו מדוע}}{\cup} ((A \cap C) \setminus (A \cap B)) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

9. $\forall i \in I = \{2,3,4\}, A_i = \{x \mid x = i^2 \cdot k, k \in \mathrm{N}\}$

ראשית נבין מיהן הקב' $A_i$ $(i \in I)$:

$$A_2 = \{x \mid x = 2^2 \cdot k, k \in \mathrm{N}\} = \{4,8,12,\dots\} = \{4k\}_{k \in \mathrm{N}}$$
$$A_3 = \{x \mid x = 3^2 \cdot k, k \in \mathrm{N}\} = \{9,18,27,\dots\} = \{9k\}_{k \in \mathrm{N}}$$
$$A_4 = \{x \mid x = 4^2 \cdot k, k \in \mathrm{N}\} = \{16,32,48,\dots\} = \{16k\}_{k \in \mathrm{N}}$$

כלומר כל כפולות 4,כפולות 9 וכפולות 16. לכן מס' שמתחלק לפחות באחד מהם ישתייך לאיחוד ומספר שיתחלק בשלושתם ישתייך לחיתוך(ובפרט לאיחוד).

$$1 \notin \bigcup_{i \in I} A_i, 1 \notin \bigcap_{i \in I} A_i \ \ ,\ \ 8 \in A_2 \Rightarrow 8 \in \bigcup_{i \in I} A_i \ \ ,\ \ 1152 \in \bigcap_{i \in I} A_i \Rightarrow 1152 \in \bigcup_{i \in I} A_i$$

10.יהיו $A = \{1,2,3\}, B = \{2,3,4\}$.

$$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\},\ \ P(B) = \{\phi, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{3,2\}, \{3,4\}, \{2,4\}, \{2,3,4\}\}$$
$$|P(A)| = |P(B)| = 2^3 = 8, |P(A) \cap P(B)| = 4 \Rightarrow |P(A) \cup P(B)| = 16 - 4 = 12 \Rightarrow$$
$$|(P(A) \cup P(B)) \setminus (P(A) \cap P(B))| = 8$$

א. $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

נכון. הוכחה:

נתון: $A \subseteq B$ נוכיח: $P(A) \subseteq P(B)$: $\Rightarrow$

$x \in P(A) \Rightarrow x \subseteq A \Rightarrow (\text{הכלה טרנזיטיבית}) x \subseteq B \Rightarrow x \in P(B) \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$

נתון: $P(A) \subseteq P(B)$ נוכיח: $A \subseteq B$: $\Leftarrow$

$x \in A \Rightarrow \{x\} \subseteq A \Rightarrow \{x\} \in P(A) \Rightarrow \{x\} \in P(B) \Rightarrow \{x\} \subseteq B \Rightarrow x \in B \Rightarrow A \subseteq B$

ב. $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$

לא נכון.דוג' נגדית:

$A = \{1,2\}, B = \{3,4\} \Rightarrow \{2,3\} \in P(A \cup B), \{2,3\} \notin P(A) \cup P(B)$