חזרה

הנחה קבועה: מדובר במידת לבג "m" על אלגברת לבג $\mathscr{L}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

הרבה פעמים נכתוב $\int_a^v f\,\mathrm{d}m$ במקום $\int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}m$

הגדרה: תהא F משפחה של קטעים ב$\mathbb{R}$. נאמר שF מכסה קבוצה $E \subset \mathbb{R}$ במובן של ויטלי אם לכל $x \in E$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים קטע $I \in F$ כך ש$x \in I$ ו$|I| < \varepsilon$.

ז.א., לכל $x \in E$ קיימים קטעים קטנים כרצוננו בf שמכילים את x.

למת ויטלי: תהי $E \subset \mathbb{R}$ קבוצה כך ש$m^*(E) < \infty$ ותהי F משפחה של קטעים שמכסים את E במובן של ויטלי. אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר סופי של קטעים $I_1, \dots I_n$ זרים בזוגות בF כך ש$m^*\left(E \backslash \biguplus_{k=1}^{n} I_k\right) < \varepsilon$.

מסקנה

בנתונים של הלמה אם $m^*(E) = s < \infty$ אז לכל $\varepsilon > 0$ יש מספר סופי של קטעים $I_1, \dots I_n$ זרים בזוגות מF כך שאם $K = \biguplus_{k=1}^{n} I_k$ אז $m^*(E \cap K) > s - \varepsilon$ ו$m(K) < s + \varepsilon$.

הוכחה

לפי הגדרת m^* קיימת קבוצה פתוחה O כך ש$E \subset O$ ו$m(O) < s + \varepsilon$. נגדיר את F_1 להיות משפחת כל הקטעים בF שמוכלים בO.

גם F_1 מהווה כיסוי ויטלי של E, ולכן ע"פ למת ויטלי יש לנו קטעים זרים בזוגות $I_1, \dots I_n$ בF_1 כך שעבור $k = \biguplus_{l=1}^{n} I_l$ $m^*(E \backslash K) < \varepsilon$.

לפי הבנייה כל $I_l \subset O$ ולכן $K \subset O$, ויוצא ש

$$s + \varepsilon > m(O) \geq m(K) = \sum_{k=1}^{n} |I_l|$$

עוד נעיר כי $E = (E \cap K) \uplus \underbrace{\left(E \cap K^{\complement}\right)}_{=E \backslash K}$, לכן

$$S = m^*(E) \leq m^*(E \cap K) + m^*(E \backslash K) < m^*(E \cap K) + \varepsilon$$

$\blacksquare$

למה 2

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ אינטרגרבילית לבג, ויהי $c > 0$ קבוע. אזי לכל $a < b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x+c)\,\mathrm{d}m = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}m$$

הוכחה

תחילה ניקח $E\subset\mathbb{R}$ מדידה ונבדוק את הלמה עבור $f\left(x\right)=I_{E}\left(x\right)$. לפי זה

$$\int_{a}^{b}f\left(x+c\right)\,\mathrm{d}m=\int_{a}^{b}I_{E}\left(x+c\right)\,\mathrm{d}m$$

אבל

$$I_{E}\left(x+c\right)=\begin{cases}1 & x\in E\\0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

לכן

$$\int_{a}^{b}I_{E}\left(x+c\right)\,\mathrm{d}m=\int_{a}^{b}I_{E-c}\,\mathrm{d}m=m\left(E-c\cap\left[a,b\right]\right)$$

כיוון שהלמה נכונה לכל I_{E} היא גם נכונה לכל פונקציה פשוטה, ואם $f:\mathbb{R}\to\left[0,\infty\right]$ מדידה, היא גבול של סדרה עולה של פונקציות פשוטות והלמה נובעת מהשלב הקודם עם התכנסות מונוטונית. ואם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{*}$ אינטגרבילית אז $f=f^{+}-f^{-}$ והלמה נובעת מהשלב הקודם.

$\blacksquare$

משפט 1(משפט הגזירה של לבג)

תהי $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ פונקציה עולה. אזי f גזירה כב"ס($\mathrm{d}m$), $f'\left(x\right)\geq0$ כב"ם ומתקיים $\int_{a}^{b}f'\,\mathrm{d}m\leq f\left(b\right)-f\left(a\right)$.

הוכחה

תחילה נרחיב את f לפונקציה עולה על כל $\mathbb{R}$ ע"י $f\left(x\right)=\begin{cases}f\left(a\right) & x<a\\f\left(b\right) & x>b\end{cases}$. נגדיר קבוצה:

$$E=\left\{ x\in\left[a,b\right]\middle|\underline{\lim_{h\to0}}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}<\overline{\lim_{h\to0}}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}\right\}$$

טענה: $m^{*}\left(E\right)=0$

הוכחת הטענה: $E=\bigcup_{\alpha<\beta\in\mathbb{Q}}E_{\alpha\beta}$ כאשר $E_{\alpha\beta}=\left\{ x\in\left[a,b\right]\middle|\underline{\lim_{h\to0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}<\alpha<\beta<\overline{\lim_{h\to\infty}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}$. נסמן $m^{*}\left(E_{\alpha\beta}\right)=s\leq b-a$. נעיר שאם $x\in E_{\alpha\beta}$ אז קיימת סדרה $h_{n}\to0$ כך שלכל n $\frac{f(x+h_{n})-f(x)}{h_{n}}<\alpha$. ז.א. לכל $x\in E_{\alpha\beta}$ יש קטעים מסוג $\left[x,x+h_{n}\right]$

או(אם $h_n < 0$) $[x+h_n, x]$ קטנים כרצוננו כך ש$\alpha < \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}$. קטעים אלו מהווים כיסוי ויטלי של $E_{\alpha\beta}$. לפי המסקנה ללמת ויטלי נוכל לבחור מספר סופי של קטעים מסוג זה $[x_n, y_n], n = 1, 2, \ldots N$ שזרים בזוגות כל שלכל n, $\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} < \alpha$ ואם $K = \biguplus_{n=1}^{\infty} [x_n, y_n]$ אז $\begin{array}{lcl} m^*(K) & < & s+\varepsilon \\ m^*(E_{\alpha\beta} \cap K) & > & s-\varepsilon \end{array}$. לפי כל זה בפרט

$$\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - f(y_n) < \sum_{n=1}^{N} \alpha [y_n - x_n] = \alpha m(K) < \alpha (s+\varepsilon)$$

כעת ניקח $x \in E_{\alpha\beta} \cap K$. אז קיים n כך ש$x \in [x_n, y_n]$, ואם לא בקצה של קטע זה, ויש מספרים h קטנים כרצוננו כך שהקטע $[x, x+h]$ או $[x+h, x]$ כולו בתוך $[x_n, y_n]$ ומתקיים $\beta < \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. קטעים אלה מהווים כיסוי ויטלי של K(פחות הקצוות). לכן ע"פ למת ויטלי נוכל לבחור מספר סופי של קטעים זרים $J_l = [w_l, z_l], l = 1, 2, \ldots m$ כך שלכל l יש איזה n כך ש$J_l \subset [x_n, y_n] \equiv I_n$ ו$\frac{f(z_l)-f(w_l)}{z_l-w_l} > \beta$ והJ_l מכסים תת קבוצה של k שמידתה גדולה מ$s-2\varepsilon$.

כעת, עבור כל $n = 1, 2, \ldots N$

$$\sum_{J_l \subset I_n} f(z_l) - f(w_l) > \sum_{J_l \subset I_n} \beta (z_l - w_l)$$

אבל

$$f(y_n) - f(x_n) \geq \sum_{J_l \subset I_n} f(z_l) - f(w_l)$$

כי f עולה. לבסוף,

$$\alpha (s+\varepsilon) > \sum_{n=1}^{N} f(y_n) - f(x_n) \geq \sum_{n=1}^{N} \sum_{J_l \subset I_n} f(z_l) - f(w_l) > \sum_{n=1}^{N} \sum_{J_l \subset I_n} \beta (z_l - w_l) =$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \beta (z_l - w_l) = \beta \sum_{l=1}^{m} |J_l| > \beta (s - 2\varepsilon)$$

הדבר אפשרי לכל $\beta > \varepsilon$. אי השוויון אפשרי רק אם $s = 0$, והוכחנו ש$m^*(E_{\alpha\beta}) = 0$ לכל $\alpha < \beta \in \mathbb{Q}$. כיוון ש$E = \bigcup_{\alpha < \beta \in \mathbb{Q}} E_{\alpha\beta}$, $m^*(E) = 0$, והוכחנו את הטענה.

נחזור להוכחת המשפט

כעת עבור $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $x \in [a, b]$, $g_n(x) = \frac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}$. כיוון ש$f$ מונוטונית היא מדידה לבג, לכן כל g_n מדידה לבג.

$g_n(x) \geq 0$ לכל n וx ולכל $x \in E^{\complement}$ קיים $g(x) = \lim_{k\to\infty} g_n(x) \in [0, \infty]$(ולכל x כך ש$g(x) < \infty$ $f'(x)$ קיים ושווה $g(x)$). בפרט $g_n \to g$ כב"מ ולפי למת פאטו:

$$\int_a^b g \,\mathrm{d}m \leq \underline{\lim} \int_a^b g_n \,\mathrm{d}m = \underline{\lim} n \int_a^b \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] \mathrm{d}m = \cdots$$

לפי למה 2 זה שווה:

$$\cdots = \underline{\lim} n \left[\int_{a+1/n}^{b+1/n} f \,\mathrm{d}m - \int_a^b f \,\mathrm{d}m \right] = \underline{\lim} n \left[\int_b^{b+1/n} f \,\mathrm{d}m - \int_a^{a+1/n} f \,\mathrm{d}m \right]$$

כעת לפי הגדרה בקטע $[b, b + 1/n]$ $f(x) \equiv f(b)$, ולכן עבור כל n $n \int_b^{b+1/n} f \,\mathrm{d}m = f(b)$.
כיוון שf עולה, בקטע $[a, a + 1/n]$ $f(x) \geq f(a)$. לכן

$$n \int_a^{a+1/n} f \,\mathrm{d}m \geq n \int_a^{a+1/n} f(a) \,\mathrm{d}m = f(a)$$

יוצא ש<u>לכל n</u>

$$n \left[\int_b^{b+1/n} f \,\mathrm{d}m - \int_a^{a+1/n} f \,\mathrm{d}m \right] \leq f(b) - f(a)$$

מכל זה נובע $\int_a^b g \,\mathrm{d}m \leq f(b) - f(a)$, בפרט $\int_a^b g \,\mathrm{d}m < \infty$ ולכן $g(x) < \infty$ כב"מ.
בפרט $f'(x)$ קיים כב"מ ושווה $g(x)$, לכן f' קיים כב"מ ומתקיים

$$\int_a^b f' \,\mathrm{d}m = \int_a^b g \,\mathrm{d}m \leq f(b) - f(a)$$

$\blacksquare$

דוגמה

$$f(x) = I_{[1/2, 1]}(x)$$

f עולה ב$[0,1]$, כב"מ $f'(x) = 0$. $f(1) - f(0) = 1 > 0 = \int_0^1 f' \,\mathrm{d}m$.

אז תמיד

$$\int_a^b f' \,\mathrm{d}m \lneqq f(b) - f(a)$$

מסקנה 1

אם $f = [a,b] \to \mathbb{R}$ מקיימת $f(x) = g(x) - h(x)$ כאשר g וh עולות ב$[a,b]$ אז $f'(x)$ קיימת כב"מ ב$[a,b]$.

מסקנה 2

נניח ש$f\left(x\right)$ מוגדרת ואינטגרבילית ב$\left[a,b\right]$ ולכל $x\in\left[a,b\right]$ נגדיר $F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\,\mathrm{d}m$. אזי $F'\left(x\right)$ קיימת כב"מ ב$\left[a,b\right]$.

הוכחה

לכל $x\in\left[a,b\right]$ נגדיר $\begin{array}{c}G\left(x\right)=\int_{a}^{x}f^{+}\,\mathrm{d}m\\H\left(x\right)=\int_{a}^{x}f^{-}\,\mathrm{d}m\end{array}$. כיוון שלכל $x\in\left[a,b\right]$ $f^{+}\left(x\right),f^{-}\left(x\right)\geq0$, $G\left(x\right)$ ו$H\left(x\right)$ עולות ב$\left[a,b\right]$. לבסוף

$$G\left(x\right)-H\left(x\right)=\int_{a}^{x}\left[f^{+}-f^{-}\right]\,\mathrm{d}m=\int_{a}^{x}f\,\mathrm{d}m=F\left(x\right)$$

ומצאנו ש$F\left(x\right)$ הפרש של שתי פונקציות עולות והיא גזירה כב"מ לפי מסקנה 1.

■

תזכורת מאינפי

המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי חקל ראשון אומר:

תהי $f\left(x\right)$ מוגדרת ואינטגרבילית רימן ב$\left[a,b\right]$. לכל $x\in\left[a,b\right]$ נגדיר $F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)\,\mathrm{d}t$. אזי $F\left(x\right)$ רציפה ב$\left[a,b\right]$ ובכל x_{0} שבו f רציפה, F' גזירה ומתקיים $F'\left(x_{0}\right)=f\left(x_{0}\right)$.

הכללת לבג

תהי $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}^{*}$ מוגדרת ואינטגרבילית לבג. נגדיר לכל $x\in\left[a,b\right]$ $F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\,\mathrm{d}m$. אזי F רציפה בהחלט(יוגדר בהמשך) ב$\left[a,b\right]$ וכב"מ $F'\left(x\right)$ קיים ושווה $f\left(x\right)$.

כדי להוכיח את הרציפות בהחלט של F נסתמך על משפט כללי בתורת לבג.

משפט 2

יהי $\left(X,S,\mu\right)$ ממ"ח ותהי $f:X\to\mathbb{R}^{*}$ אינטגרבילית $\mathrm{d}\mu$. אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $E\in S$ ואם $\mu\left(E\right)<\delta$ מתקיים $\int_{E}\left|f\right|\,\mathrm{d}\mu<\varepsilon$.

הוכחה

לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $f_{n}:X\to\mathbb{R}$ ע"י

$$f_{n}\left(x\right)=\begin{cases}\left|f\left(x\right)\right| & \left|f\left(x\right)\right|\leq n\\n & \left|f\left(x\right)\right|>n\end{cases}=\min\left(n,\left|f\left(n\right)\right|\right)$$

לפי זה לכל $x \in X$ $\cdots \leq f_2(x) \leq f_1(x) \leq 0$ וכל f_n מדידה.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = |f(x)|$$

לפי התכנסות מונוטונית $\int_X |f|\,\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} \int_X f\,\mathrm{d}m$.

כעת יהי $\varepsilon > 0$ נתון. נוכל לבחור n **מסויים** כך ש$|f(x)| \geq f_n(x)$ ו$\int_X (|f| - f_n)\,\mathrm{d}\mu <$ $\frac{\varepsilon}{2}$. כעת אם $E \in S$ מקיימת $\mu(E) < \frac{\varepsilon}{2n}$

$$\int_E |f|\,\mathrm{d}\mu = \int_E (|f| - f_n)\,\mathrm{d}\mu + \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu \leq \int_X (|f| - f_n)\,\mathrm{d}\mu + \int_E n\,\mathrm{d}\mu <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + n\mu(E) < \frac{\varepsilon}{2} + n\frac{\varepsilon}{2n} = \varepsilon$$

■

הגדרה

תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה כלשהי. נאמר שf רציפה בהחלט ב$[a,b]$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם הקטעים $(a_k, b_k) \subset [a,b]$ זרים בזוגות עבור $1 \leq k \leq n$ ואם $\sum_{k=1}^{n} b_k - a_k$ מתקיים $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

הערה

טריוויאלי שרציפות בהחלט גוררת רציפות במ"ש. ההיפך לא נכון.

משפט 3

תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}^*$ מוגדרת ואינטגרבילית $\mathrm{d}m$. לכל $x \in [a,b]$ נגדיר $F(x) = \int_a^x f\,\mathrm{d}m$. אזי F רציפה בהחלט ב$[a,b]$.

הוכחה

יהי $\varepsilon > 0$ נתון. כיוון שf אינטגרבילית משפט 2 אומר שקיים $\delta > 0$ כך שאם $E \subset [a,b]$ מדידה ואם $m(E) < \delta$ אז $\int_E |f|\,\mathrm{d}m < \varepsilon$.

כעת נניח שהקטעים $(a_k, b_k)_{k=1}^{n}$ מוכלים ב$[a,b]$ וזרים בזוגות, ונניח ש$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$.

לכן אם נגדיר $E = \biguplus_{k=1}^{n} (a_k, b_k)$, $m(E) < \delta$.

מכל זה נובע ש

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_a^{b_k} f\,\mathrm{d}m - \int_a^{a_k} f\,\mathrm{d}m \right| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{a_k}^{b_k} f\,\mathrm{d}m \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} |f|\,\mathrm{d}m = \int_E |f|\,\mathrm{d}m < \varepsilon$$

לכן f רציפה בהחלט.

$\blacksquare$

המטרה הבאה

המטרה הבאה שלנו היא להוכיח שאם $F(x)=\int_a^x f\,\mathrm{d}m$ אז $f=F'$ כב"מ.
נסתמך בין היתר על למה:

למה

תהי $E\subset[a,b]$ קבוצה מדידה כך ש$m(E)=s>0$. אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימת **קבוצה סגורה** $F\subset E$ כך ש$m(F)>s-\varepsilon$.

הוכחה: תרגיל.

משפט 4

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}^*$ פונקציה אינטגרבילית. נניח שלכל $c\in[a,b]$ $\int_a^c f\,\mathrm{d}m=0$. אזי $f(x)=0$ כב"מ ב$[a,b]$.
(כבר הוכחנו את זה עבור $f(x)\geq 0$, אבל פה זה לא נתון)

הוכחה

תחילה נעיר שאם $[\alpha,\beta]$ קטע כלשהו בתוך $[a,b]$ אז

$$\int_\alpha^\beta f\,\mathrm{d}m=\int_a^\beta f\,\mathrm{d}m-\int_a^\alpha f\,\mathrm{d}m=0-0=0$$

נמשיך בדרך השלילה: אם $f(x)\not\equiv 0$ כב"מ אז קיים $E\subset[a,b]$ כך ש $m(E)>0$ ו$f(x)>0$ לכל $x\in E$ או $f(x)<0$ לכל $x\in E$. בה"כ $f(x)>0$ בE. לפי הלמה קיים $F\subset E$ כך שF סגורה ו$m(F)>0$. ממשפט בפרק הקודם $\int_F f\,\mathrm{d}m>0$. כיוון שF סגורה $(a,b)-F$ פתוחה, ונוכל לכתוב

$$(a,b)-F=\biguplus_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n)$$

או

$$(a,b)=F\uplus\biguplus_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n)$$

נובע ש

$$0=\int_a^b f\,\mathrm{d}m=\int_F f\,\mathrm{d}m+\int_{\biguplus_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n)} f\,\mathrm{d}m=\underbrace{\int_F f\,\mathrm{d}m}_{>0}+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f\,\mathrm{d}m}_{=0}$$

"הוכחנו" $0>0$! הסתירה מוכיחה את המשפט.

$\blacksquare$

מסקנה

נניח ש-$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}^*$ פונקציות אינטגרביליות, ונניח לכל $c\in[a,b]$ $\int_a^c f\,\mathrm{d}m=\int_a^c g\,\mathrm{d}m$. אזי $f(x)=g(x)$ כב"מ ב-$[a,b]$.

הוכחה

לפי הנתון $\int_a^c (f-g)\,\mathrm{d}m=0$ לכל $c\in[a,b]$. לפי משפט 4 $f(x)-g(x)=0$ כב"מ ב-$[a,b]$. מש"ל.

משפט 5

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}^*$ פונקציה אינטגרבילית. לכל $x\in[a,b]$ נגדיר $F(x)=\int_a^x f\,\mathrm{d}m$. אזי $F(x)$ גזירה כב"מ ב-$[a,b]$ וכב"מ $F'(x)=f(x)$.

הוכחה

מקרה 1: $f(x)$ חסומה: ז.א. קיים $M>0$ כך שלכל $x\in[a,b]$ $|f(x)|\le M$. לכל n נגדיר $F_n(x)=\frac{F\left(x+\frac{1}{n}\right)-F(x)}{1/n}$. לפי מסקנה 2 למשפט 1 F גזירה כב"מ, וכב"מ $F'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)$. נשים לב שלכל n ו-x $F_n(x)=n\int_x^{x+1/n} f\,\mathrm{d}m$ ולכן

$$|F_n(x)|\le n\int_X |f|\,\mathrm{d}m\le n\int_x^{x+1/n} M\,\mathrm{d}m=M$$

כעת אם $c\in[a,b]$, $F_n\to F'$ כב"מ, ובאופן חסום בקטע $[a,c]$, לפי משפט ההתכנסות החסומה

$$\int_a^c F'\,\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_a^c F_n\,\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}n\int_a^c\left[F\left(x+\frac{1}{n}\right)-F(x)\right]\,\mathrm{d}m=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\int_c^{c+1/n}F\,\mathrm{d}m-n\int_a^{a+1/n}F\,\mathrm{d}m$$

כיוון ש-F רציפה, המשפט היסודי הקלאסי אומר שהגבול הוא

$$F(c)-F(a)=\int_a^c f\,\mathrm{d}m$$

הדבר נכון לכל $c\in[a,b]$. לפי המסקנה למשפט 4, $F'=f$ כב"מ ב-$[a,b]$.