

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 20 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x)) \cdot \sin(\ln(1 + \sin(x)))}{(1 - \cos(x))^2 e^{\sin(x)}}$

ב.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos(x))^x$

ג.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + n + n^2}$

2.

א. חשבו את  $\int \sin(\ln(x)) dx$

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס  $\int_1^{\infty} x e^{-x} dx$ , ואם כן חשבו אותו.

3. תהי  $f$  פונקציה רציפה בכל הממשיים כך ש  $f(0) = 1$  ולכל  $x$  מתקיים כי  $f(x) \neq x$

ג. הוכיחו כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

ד. נניח בנוסף כי  $f$  גזירה בכל הממשיים. הוכיחו/הפריכו:  $f'(x) \geq 1$  לכל  $x$

4. תהי  $f$  פונקציה רציפה, גזירה וחיובית בכל הממשיים, כך ש  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = f'(0)$

א. הוכיחו כי  $f(0) = 1$ .

נתון בנוסף כי קיימת נק'  $0 < x_0$  עבורה  $\ln(f(x_0)) = x_0$ .

ב. הוכיחו כי קיימת נקודה  $c$  עבורה  $f'(c) = f(c)$

5.

א. הוכיחו כי לכל  $x > 0$  מתקיים  $\ln(1 + x) < x$ .

ב. נביט בסדרה  $a_n$  המוגדרת ע"י נוסחת הנסיגה  $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$  ותנאי ההתחלה  $a_1 = 1$ .

הוכיחו כי הסדרה  $a_n$  מתכנסת ומצאו את גבולה.

6.

א. תהי  $f$  גזירה בקטע  $[0, 1]$ .

הוכיחו כי גבול הסדרה  $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f'\left(\frac{i}{n}\right) \cdot f\left(\frac{i}{n}\right)$  הינו  $\frac{f^2(1) - f^2(0)}{2}$

ב. חשבו את  $\sin^2(1)$  עד רמת דיוק של  $h = 0.05$