תורת הקבוצות־ פתרון הבוחן

02.01.2017

הנחיות: יש לענות על מתוך 3 השאלות הבאות. כתבו במפורש על איזה מהשאלות בחרתם לענות.

1. הוכיחו/ הפריכו:

א. הפו' $f(\alpha)=s(\alpha)$ מונוטונית ורציפה.

ב. לכל שני סודרים שונים מ0 α,β, מתקיים $\alpha<\beta+\alpha$.

ג. לכל שני סודרים α,β כך ש$\alpha>1$ מתקיים $\alpha^\beta\geq\beta$.

פתרון:

א. הפרכה: $f(\omega)=\omega+1\neq\omega=\sup\{n+1|n<\omega\}=\sup\{f(n)|n<\omega\}$.

ב. הפרכה: נקח $\alpha=\omega,\beta=1$. אז $\omega=1+\omega$.

ג. הוכחה: הוכחנו בכיתה שהפו' $f(\beta)=\alpha^\beta$ היא מונוטונית ורציפה לכל $\alpha>1$, וכן שלכל פו' מונוטונית ורציפה מתקיים $f(\beta)\geq\beta$.

2. מצאו סודרים α ו $\beta<\omega+2$, כך שמתקיים: $(\omega^2+2)=(\omega+2)\alpha+\beta$

פתרון:

טענה: $\omega^2=(\omega+2)\omega$.

הוכחה: ω גבולי, ולכן:

$(\omega+2)\omega=(\omega+2)\sup\{n:n<\omega\}=\sup\{(\omega+2)n:n<\omega\}=\sup\{\omega n+2:n<\omega\}=\sup\{\omega n:n<\omega\}=\omega\sup\{n:n<\omega\}=\omega\cdot\omega=\omega^2$.

הסבר: $(\omega+2)n=(\omega+2)+(\omega+2)+...+(\omega+2)=\omega+(2+\omega)+...+(2+\omega)+2=\omega n+2$.

מצד אחד, $\omega n+2>\omega n$, ולכן $\sup\{\omega n+2:n<\omega\}\geq\sup\{\omega n:n<\omega\}$.

מצד שני, $\omega n+2<\omega n+\omega=\omega(n+1)$, ולכן $\sup\{\omega n+2:n<\omega\}\leq\sup\{\omega(n+1):n<\omega\}=\sup\{\omega n:n\in\mathbb{N}\}$.

לכן, $\omega^2+2=(\omega+2)\omega+2$.

3. יהיו A,B קבוצות סדורות היטב, כך שקיימות פו' שומרות סדר $f:A\to B$ ו$g:B\to A$.

הוכיחו: קיים ויחיד $h:A\to B$ איזומורפיזם סדר.

פתרון:

ראשית, נוכיח ש$A\cong B$.

פו' שומרות סדר הן חח"ע, לכן $A\cong f(A)\subseteq B$ ו$B\cong g(B)\subseteq A$. מתרגיל שהיה בש"ב נקבל ש $type(A)\leq type(B)$ ו $type(B)\leq type(A)$. בסודרים ידוע שזה גורר $type(A)=type(B)$. לכן $B\cong type(A)=type(B)\cong A$. וזה גורר ש $A\cong B$. כלומר, קיים איזו' סדר בינהן.

כעת, נוכיח שהאיזו' סדר יחיד. נניח בשלילה שיש $f,g:A\to B$ איזו' סדר. אז $g^{-1}\circ f:A\to A$ הוא איזו' סדר מA לעצמה. הוכחנו בתרגול שזה חייב להיות העתקת הזהות. $g^{-1}\circ f=id \Longleftarrow g=f$.

בהצלחה!