תרגיל בית 2 באלגברה מתקדמת
83-804 סמסטר א' תשע"ט

שאלה 1. כתבו את לוחות הכפל של U_5, U_8 ובדקו האם הן ציקליות.

שאלה 2. ראינו בתרגיל הבית הקודם כי קבוצת המטריצות

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

היא תת־חבורה של $GL_2(\mathbb{Z}_2)$. מצאו את הסדר של H ואת הסדר של איברי H. האם H ציקלית?

שאלה 3. תהי G חבורה אבלית. נסמן ב-T את אוסף האיברים מסדר סופי ב-G. הוכיחו כי $T \leq G$.

שאלה 4. תהי G חבורה ותהי $\varnothing \neq H \subseteq G$ תת־קבוצה לא ריקה.

א. הוכיחו שאם G חבורה סופית, אז כדי להוכיח ש-H היא תת־חבורה של G מספיק לבדוק סגירות לפעולה.

ב. הפריכו את הסעיף הקודם כאשר G אינסופית.

שאלה 5. תהי G חבורה. תהיינה $H, K_1, K_2 \leq G$ תת־חבורות של G. הוכיחו כי אם $H \subseteq K_1 \cup K_2$, אז מתקיים $H \subseteq K_1$ או $H \subseteq K_2$.

שאלה 6 (רשות)**.** מצאו דוגמה לחבורה G ולתת־חבורות $H, K_1, K_2, K_3 \leq G$ כך שמתקיים

$$H \subseteq K_1 \cup K_2 \cup K_3$$

אבל H **אינה** מוכלת באף איחוד מן הצורה $K_i \cup K_j$ עבור $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

שאלה 7 (רשות)**.** קבוצה I נקראת *קבוצה מכוונת* אם היא קבוצה סדורה חלקית (קיים סדר חלקי $<$ על I) כך שלכל $i, j \in I$ קיים $k \in I$ כך ש-$i, j < k$.
אוסף $\{G_i\}_{i \in I}$ של חבורות נקרא רשת עולה אם לכל $i < j$ מתקיים $G_i \subseteq G_j$. הוכיחו כי איחוד רשת עולה $\bigcup_{i \in I} G_i$ הוא חבורה. הסיקו (מיידי) שאם ישנה שרשרת עולה של חבורות $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots$, אז גם איחוד השרשרת הוא חבורה.
לדוגמה, הוכחנו כי Ω_∞ היא חבורה כמקרה פרטי של שאלה זו, שבו $I = \mathbb{N}$ ושמתקיים $i < j$ אם $i | j$.

בהצלחה!