

## פיסיקה למתמטיקאים 88-320 מבחן מועד ב' סמסטר ב' תשע"ב

משך המבחן: שלוש שעות. כל חומר עזר מותר בשימוש (כולל מחשבון).  
ענו על 3 מ-4 השאלות הבאות. ניתן גם (לא חובה) לענות על שאלת הבונוס (שאלה 5). סמנו  
בבירור על איזו שאלה אתם עונים והקיפו תשובות סופיות.

1. שאלה מתרגילי הבית:

**The brachistochrone problem** בשאלה זו נוודא כי זמן הנסיעה מנקודה  $(x_1, y_1)$   
לנקודה  $(x_2, y_2)$  לאורך ישר המחבר את שתי הנקודות,  $t_{1,2}^{lin}$ , ארוך מזמן הנסיעה בין  
שתי הנקודות לאורך ציקלואידה,  $t_{1,2}^{cyc}$ .  
(נניח כי התנועה מתרחשת בין הראשית למינימום של הציקלואידה  
 $x(\phi) = -a(\phi - \sin \phi), y(\phi) = a(1 - \cos \phi), a < 0$

(א) חשבו את  $t_{1,2}^{lin}$  משיקולי קינמטיקה

(ב) הניחו פרמטריזציה  $\{0 \leq t \leq t_{1,2}^{cyc}; \phi(0) = 0, \phi(t_{1,2}^{cyc}) = \pi\}$

וחשבו את  $t_{1,2}^{cyc} = \int_1^2 ds/v$

(ג) הראו כי  $t_{1,2}^{lin}/t_{1,2}^{cyc} = \sqrt{1 + 4/\pi^2}$

(ד) הראו כי  $t_{1,2}^{cyc}$  כאשר נוסעים מנקודה  $(x_1, y_1)$  למינימום של הציקלואידה  $(-\pi a, 2a)$   
קבוע לכל בחירה של נקודת התחלה  $(x_1, y_1)$

(רמז:  $\int_{\phi_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{\cos \phi_0 - \cos \phi}} d\phi = \pi$ , כאשר  $\phi_0$  הזווית בנקודת ההתחלה).

2. חלקיק בעל מסה  $m$  נע בשדה מרכזי עם פוטנציאל  $V(r)$ . הלגראנג'יאן בקורדינטות

$$x = r \sin \theta \sin \phi, y = r \sin \theta \cos \phi, z = r \cos \theta$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - V(r)$$

(א) מצאו את התנעים  $(p_r, p_\theta, p_\phi)$  הצמודים לקורדינטות  $(r, \theta, \phi)$ .

(ב) מצאו את ההמילטוניאן  $H(r, \theta, \phi, p_r, p_\theta, p_\phi)$ .

(ג) רשמו את שש משוואות התנועה של המילטון המתאימות.

(ד) ע"י שמוש בתוצאות סעיף ג הראו כי התנע הזוויתי בכיוון  $z$

$$L_z = m(\dot{x}y - \dot{y}x)$$

נשמר.

3. חלקיק בעל מסה  $m$  נע בפוטנציאל  $V(x) = m\omega^2 x^2/2$

(א) נתון כי בזמן  $t = 0$  החלקיק במצב

$$|\psi(t=0)\rangle = a_1|\varphi_1\rangle + a_2|\varphi_2\rangle + a_3|\varphi_3\rangle,$$

אנרגיה  $E_n$ .

מה ההסתברות למדוד לחלקיק הנמצא במצב  $|\psi(t=0)\rangle$  אנרגיה נמוכה מ- $3\hbar\omega$ ?

- (ב) מצאו את  $\langle E \rangle$  עבור החלקיק במצב  $|\psi(t=0)\rangle$ .  
 (ג) מצאו עבור  $t > 0$  כלשהוא את  $|\psi(t)\rangle$ , את ההסתברות למדוד אנרגיה נמוכה מ- $3\hbar\omega$  ואת  $\langle E \rangle$ .

4. נתון ההמילטוניאן  $\hat{H} = E_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + K(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ , כאשר ידוע כי  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \beta^2$ , קבוע ממשי חיובי, ו- $E_0, K$  ממשיים.

- (א) מצאו קבועים מרוכבים  $u$  ו- $v$  כך שהאופרטורים  $\hat{b} = u\hat{a} + v$ ,  $\hat{b}^\dagger = u^*\hat{a}^\dagger + v^*$  מקיימים  $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$  ומתקיים  $\hat{H} = E_1 \hat{b}^\dagger \hat{b} + E_2$ . בטאו את  $E_1$  ו- $E_2$  באמצעות  $E_0, K$  ו- $\beta$ .  
 (ב) מצאו את הערכים העצמיים האפשריים של  $\hat{H}$ .

- (ג) רשמו במפורש את אלמנטי המטריצה של  $\hat{a}$  בין המצבים העצמיים של  $\hat{H}$ .  
 (ד) מהו ערך התוחלת של  $(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$  בכל מצב עצמי שמצאתם ב-4?

**הדרכה:** ידוע כי ניתן לרשום את ההמילטוניאן של אוסילטור הרמוני:  $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2)$ , כאשר  $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ ,  $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ .

5. (בונוס - לא חובה) צופה ניח רואה את חללית  $A$  נעה במהירות  $\beta_A = 0.8$  וחללית  $B$  נעה במהירות  $\beta_B = 0.6$  זו לקראת זו. באיזו מהירות רואה חללית  $A$  את חללית  $B$  מתקדמת לקראתה?

בהצלחה