תרגיל 2

1. יהיו R,S חוגים עם יחידה ו$\varphi:R\to S$ הומומורפיזם של חוגים עם יחידה. הוכיחו את הטענות הבאות:
   (א) לכל $x\in R$, $\varphi(-x)=-\varphi(x)$.
   (ב) אם $x\in R$ הפיך, אז $\varphi(x)$ הפיך, וכן $\varphi(x^{-1})=\varphi(x)^{-1}$.
   (ג) אם $x\in R$ נלפוטנט, אז $\varphi(x)$ נלפוטנט.
   (ד) אם φ אפימורפיזם, אז $\varphi[Z(R)]\subseteq Z(S)$.
2. מצאו את כל ההומומורפיזמים (של חוגים עם יחידה) מ$\mathbb{Q}$ לעצמו.
3. נסמן $R=M_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
   מצאו כמה הומומורפיזמים של חוגים $\psi\colon\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]\to R$ ישנם. רמז: הפתרון תלוי רק בתמונה $\psi(\sqrt[3]{2})$.
4. יהיו $\{S,R_i\}_{i\in I}$ חוגים עם יחידה. תזכורת $\Pi_{i\in I}R_i=\{(a_i)_{i\in I}|\forall i\in I,a_i\in R_i\}$
   (א) נגדיר $\pi_i:\Pi_{i\in I}R_i\to R_i$ ע"י $\pi_i(a_j)=a_i$. (הטלה על הרכיב הi). הוכיחו שזהו אפימורפיזם.
   (ב) תהי $\varphi:S\to\Pi_{i\in I}R_i$ העתקה. הוכיחו שφ הומומורפיזם אמ"ם לכל i, $\pi_i\circ\varphi:S\to R_i$ הומומורפיזם.
   (ג) תנו דוגמא לשני חוגים עם יחידה, A,B כך שקיים הומומורפיזם של חוגים בלי יחידה $\varphi:A\to B$, ואין הומורפיזם של חוגים עם יחידה $\psi:A\to B$.
5. יהי R חוג. הוכיחו $I=\{f\in R[x]|f(212)=0\}\lhd R[x]$.
6. בכל סעיף, קבעו האם I אידיאל של R. במידה ולא, האם הוא אידיאל ימני? שמאלי?
   (א) $R=\mathbb{R}[x],I=\mathbb{R}_n[x]$ (כל הפולינומים עד דרגה n).
   (ב) $R=M_2(\mathbb{Z}).I=\begin{pmatrix}2\mathbb{Z}&4\mathbb{Z}\\2\mathbb{Z}&4\mathbb{Z}\end{pmatrix}$
   (ג) $R=\begin{pmatrix}*&*\\0&*\end{pmatrix},I=\begin{pmatrix}0&*\\0&0\end{pmatrix}$ (מטריצות משולשיות עליונות מעל חוג נתון)
7. יהיו $\{R_i\}_{i\in I}$ חוגים עם יחידה.
   (א) יהיו $I_i\trianglelefteq R_i$. הוכיחו: $\Pi I_i\trianglelefteq R_i$.

(ב) הוכיחו/הפריכו: כל אידיאל של המכפלה האינסופית ΠR_i הוא מהצורה ΠI_i עבור $I_i \trianglelefteq R_i$?

8. תהי X קבוצה. הזכרו ש-$(P(X), \triangle, \cap)$ הוא חוג חילופי. תהי $\varnothing \neq \tau \subseteq P(X)$ תת־קבוצה לא ריקה.

(א) נאמר ש-τ סגורה לאיחוד אם $A, B \in \tau$ גורר $A \cup B \in \tau$. נאמר ש-τ סגורה להכלה אם $A \subseteq B \in \tau$ גורר $A \in \tau$. הוכיחו כי τ אידאל אם ורק אם τ סגורה לאיחוד והכלה.

(ב) נניח ש-X סופית. הוכיחו ש-τ אידאל אם רק אם קיים $C \subseteq X$ כך ש-$\tau = P(C)$.

(ג) מצאו אידאל τ של $(P(\mathbb{N}), \triangle, \cap)$ שאינו מן הצורה $P(C)$.

9. יהי R חוג ו$I, J \trianglelefteq R$. הוכיחו: $I \cup J \trianglelefteq R$ אמ"ם $I \subseteq J \vee J \subseteq I$.