

אלגברה מופשטת 3 – שדות סופיים

1. פרקו את $x^{10} - 1$ לגורמים אי-פריקים, ומצאו מהפירוק את הפולינום הציקלוטומי Φ_{10} (הפולינום המינימלי של ρ_{10}).
מצאו את חברת גלואה של שדה הפיצול של Φ_{10} .
2. מצאו את הגורמים האי-פריקים של הפולינום $x^8 - x$ והסיקו שיש רק 2 פולינומים אי-פריקים מדרגה 3 מעל \mathbb{Z}_2 .
3. הראו שאם בשדה סופי עם מאפיין $p > 0$ האיבר $a \in E$ הוא יוצר של החבורה הכפלית E^* , אזי $E^* = \langle \sigma(a) \rangle$ לכל $\sigma \in \text{Gal}(E/\mathbb{Z}_p)$.
4. מצאו את חברת גלואה של שדה הפיצול של $x^3 - 2$ מעל \mathbb{Z}_{11} ומעל \mathbb{Z}_7 .
5. הראו שמתקיים $\alpha + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^8 = 1$ וגם $\alpha^{15} = 1$ כאשר α שורש של הפולינום $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$.
6. תהי $\varphi(n)$ פונקצית אוילר. הראו שיש לפחות $\frac{\varphi(p^t - 1)}{t}$ פולינומים אי-פריקים מעל \mathbb{Z}_p מדרגה t .
7. חשבו את מספר הגורמים האי-פריקים של $x^{256} - x$ מעל \mathbb{F}_4 .