<u>חשבון אינפיניטסימאלי 3 – תרגיל בית מס' 8</u>

<u>שאלה 1</u> (אין קשר בין סעיפי השאלה)

א. בדקו כי המערכת: $\begin{cases} x = u + \ln v \\ y = v - \ln u \\ z = 2u + v \end{cases}$ מגדירה בסביבת הנקודה $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = (1,1,3,1,1)$ את u,v,z כפונקציות של x,y. חשבו את $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)$.

ב. נתונה המערכת: $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}$.

(i) מצאו נקודה (x_0, y_0, z_0) המתאימה לערכי הפרמטרים $u_0 = 1, v_0 = 2$.

(ii) חשבו את הנגזרות $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$.

<u>שאלה 2</u>

תהי $f(x,v)$ פונ' בעלת נגזרות חלקיות רציפות המקיימת $f(0,0) = 0$. נתונה מערכת המשוואות:

$$(*) \begin{cases} x + y + u + v = 0 \\ f(x,v) = 0 \end{cases}$$

א. הוכח כי אם המשוואה $f(x,v) = 0$ מגדירה את v כפונ' סתומה של x בסביבת (0,0) אז המערכת (*) מגדירה את u,v כפונ' סתומות של (x,y) בסביבת הנקודה (0,0,0,0).

ב. עבור $f(x,v) = e^x + e^v - 2 - x - \lambda v$

a. לאילו ערכי λ מגדירה (*) את u,v כפונ' סתומות של (x,y) בסביבת הנקודה (0,0,0,0).

b. עבור אותם ערכי λ חשב את $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)$

<u>הדרכה לסעיף א':</u> האם ניתן להשתמש במשפט הפונקציות הסתומות במקרה זה? אם כן, נמקו מדוע והמשיכו עפ"י המשפט, אם לאו – הוכיחו את טענת הסעיף באופן ישיר, ללא המשפט.

<u>שאלה 3</u>

נתונה מערכת המשוואות : $\begin{cases} f(x,u,v)=0 \\ g(y,u,v)=0 \\ h(z,u,v)=0 \end{cases}$.

א. נסחו תנאים מספיקים על-מנת ש- z,u,v יהיו מוגדרות כפונקציות של x,y בראשית.

ב. בתנאי סעיף א׳ הוכיחו : $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{f_x}{h_z}\cdot\dfrac{\dfrac{\partial(h,g)}{\partial(u,v)}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$.

<u>הערה :</u> $\dfrac{\partial(h,g)}{\partial(u,v)}$, $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}$ אלה <u>היעקוביאנים</u> המתאימים, למשל :
$\dfrac{\partial(h,g)}{\partial(u,v)}=\det\begin{pmatrix} h_u & h_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}$.

<u>שאלה 4</u> (אין קשר בין סעיפי השאלה)

א. מצאו את המרחק הקצר ביותר מראשית הצירים להיפרבולה $7x^2+8xy+y^2=45$. נמקו מדוע זהו אכן המרחק הקצר ביותר.

ב. מצאו את ערכי הקיצון הגלובאליים של הפונקציה $f(x,y)=x+y$ בקבוצה $D=\{(x,y): xy\ge 4, x+2y\le 9, x\ge 0, y\ge 0\}$. באילו נקודות בקבוצה הנ״ל ערכים אלה מתקבלים? היעזרו במידת הצורך בשיטת כופלי לגרנז׳.

<u>שאלה 5</u>

מהו הערך המקסימאלי של הסכום $\sum_{i=1}^{n}\sim_i x_i$ על פני כדור היחידה ב- $\mathbb{R}^n$, $\{\underline{x}\in\mathbb{R}^n : \|x\|_2=1\}$? נמקו היטב את שיקוליכם.

<u>הערה :</u> ניתן כמובן להרחיב את שיטת כופלי לגרנז׳ לפונקציות של n משתנים.
הסתכלו בדרך הכללית בה טיפל המרצה בשיטה זו במהלך ההרצאות האחרונות.
בתרגול עשינו שימוש בכופלי לגרנז׳ במקרה של פונקציות של 2 משתנים.