ב"ש אנליזה 1 תשעז מועד א

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)\cdot(1-\cos(x))\cdot\cos(e^x)}{x\sin(x)}$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבלות ידועים

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)\cdot(1-\cos(x))\cdot\cos(e^x)}{x\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{x}{\sin(x)}\cdot\frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot\cos(e^x)\cdot\frac{x^2}{x}$$
$$=1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos(1)\cdot 0=0$$

(ב) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x-x^e$

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty} e^x-x^e=\lim_{x\to\infty} e^x\left(1-\frac{x^e}{e^x}\right)=\lim_{x\to\infty} e^x\left(1-\left(\frac{x}{e^{\frac{x}{e}}}\right)^e\right)=\{\infty\cdot(1-0^e)\}=\infty$$

כאשר מתבססים על הגבול

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\frac{x}{e}}}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{e}\cdot e^{\frac{x}{e}}}=0$$

(ג) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$

פתרון: מתקיים

$$\sqrt[n]{2^n+3^n}=\sqrt[n]{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}=3\cdot\sqrt[n]{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}$$

נשתמש בכלל המנה עם הסדרה $a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n+1$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right]}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}\to 1$$

ולכן גם $\sqrt[n]{a_n}\to 1$ ולכן הגבול המבוקש הוא .

$$\sqrt[n]{2^n+3^n}=\sqrt[n]{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}=3\cdot\sqrt[n]{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}\to 3\cdot 1$$

2. תהי פונקציה f כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f'(x)\geq 1$.
תהא a_n סדרה כך שלכל n מתקיים $a_{n+1}=f(a_n)$ וגם $a_1\leq a_2$.

(א) הוכיחו כי a_n סדרה עולה, כלומר לכל n מתקיים $a_{n+1}\geq a_n$.

פתרון: מהנתון ש $f'(x) \geq 1$ לכל x, נסיק ש f עולה ממש בכל הממשיים. כעת, צריך להוכיח שלכל n מתקיים $a_{n+1} \geq a_n$.

הוכחה באינדוקציה:

- בסיס $n = 1$: אכן $a_1 \leq a_2$ - זה נתון
- צעד - נניח נכונות עבור n, כלומר $a_n \leq a_{n+1}$. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר $a_{n+1} \leq a_{n+2}$. מכיוון ש f עולה ו $a_n \leq a_{n+1}$ נסיק כי $f(a_n) \leq f(a_{n+1})$. לפי הגדרה, זה אומר ש $a_{n+1} \leq a_{n+2}$ כפיר שרצינו.

(ב) הוכיחו או הפריכו $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

פתרון: הפרכה: $f(x) = x$ מקיימת כי $f'(x) = 1 \geq 1$. בנוסף, עבור $a_1 = 1$ נקבל ש $a_2 = f(1) = 1$ ואז $a_3 = f(1) = 1$ וכו' וקיבלנו סדרה קבועה של 1 שאינה שואפת לאינסוף. (הוכחה מסודרת יותר שמדובר בסדרה קבועה על 1, באינדוקציה. בסיס: $a_1 = 1$ לפי הגדרה. צעד- אם $a_n = 1$ אז $a_{n+1} = f(1) = 1$).

3. תהיינה g, h פונקציות גזירות ב $x = 0$ ונביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq 0 \\ h(x) & x < 0 \end{cases}$$

(א) הוכיחו: f גזירה ב $x = 0$ אם ורק אם $g(0) = h(0)$ וגם $h'(0) = g'(0)$.

פתרון: בכיוון $(\Rightarrow)$ נניח $g(0) = h(0)$ וגם $h'(0) = g'(0)$ ונוכיח כי $f'(0)$ קיימת. לפי הגדרה,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

וזה שקול להראות כי כלומר

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

אכן

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{h(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x} = h'(0) = g'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

בכיוון השני $(\Leftarrow)$ נניח כי קיימת $f'(0)$ ונוכיח כי $h(0) = g(0)$ וגם $h'(0) = g'(0)$. כיוון שפונקציה שגזירה בנקו' גם רציפה בה נסיק ש f רציפה ב $x = 0$. לכן, מתקיים לפי הגדרה,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

ובפרט

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = g(0)$$

ומכיוון ש h רציפה ב $x = 0$ נקבל ש $\lim_{x\to 0^-} h(x) = h(0)$ ולכן השיוויון לעיל אומר ש $g(0) = h(0)$. כעת נשתמש בנתון ש $f'(0)$ קיימת ולכן

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

ובצירוף ש $h(0) = g(0)$ נקבל

$$h'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{h(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = g'(0)$$

כאשר השיוויונות באדום נובעים מכך ש g,h גזירות ב $x=0$.

(ב) הוכיחו/הפריכו: $f(x)$ רציפה ב $x=0$ אם ורק אם $f\left(x^2\right)$ גזירה ב $x=0$.
פתרון: הפרכה: $g(x)=1, h(x)=2$ גזירות בכל הממשיים. בנוסף f אינה רציפה ב $x=0$ שהרי הגבול הימני שוה ל 1 והשמאלי ל 2. אבל

$$f(x^2)=g(x^2)=1$$

גזירה גם בכל הממשיים ובפרט ב $x=0$.

4. נביט בפונקציה $f(x)=\frac{x}{e^x}$

(א) מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=\frac{1}{e^2}$.
פתרון: נגדיר פונקציה

$$g(x)=f(x)-\frac{1}{e^2}$$

נשאל שאלה שקולה: כמה שורשים יש ל $g(x)$. נגזור

$$g'(x)=f'(x)=\frac{e^x-e^x\cdot x}{e^{2x}}=\frac{e^x\left(1-x\right)}{e^{2x}}$$

ולכן f' מתאפסת רק ב 1. לפי הטבלה

x	0	1	0
$f'(x)$	+	0	$-$

נסיק שהפונקציה g עולה ממש בקרן $(-\infty,1)$ויורדת ממש ב $(1,\infty)$ ולכן יש לה בכל אחת מהקרנות לכל היותר שורש אחד. . בנוסף, 1 נקודת מקסימום של g והערך בה הוא $g(1)=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}=\frac{e-1}{e^2}>0$. מתקיים

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}\underbrace{=}_{\text{L'Hopital}, \frac{\infty}{\infty}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

ולכן

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=0-\frac{1}{e^2}$$

ולכן קיימת נקודה $1<d$ כך ש $g(d)<0$ לכן בקטע $[1,d]$ הפונקציה g מחליפה סימן ומכיוון שהיא רציפה בקטע היא מקבלת ערך 0 לפי משפט ערך הביניים ולכן ל g יש שורש יחיד ב $(1,\infty)$. בנוסף,

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=\{\frac{-\infty}{0^+}\}=-\infty$$

ולכן

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty-\frac{1}{e^2}=-\infty$$

ולכן קיימת $c<1$ כך ש $g(c)<0$לכן בקטע $[c,1]$ הפונקציה g מחליפה סימן ומכיוון שהיא רציפה בקטע היא מקבלת ערך 0 לפי משפט ערך הביניים ולכן ל g יש שורש יחיד ב $(-\infty,1)$.
לכן בסה"כ יש 2 פתרונות למשוואה שבשאלה.

(ב) מצאו את המקסימום והמינימום של $f(x)$ בקטע $[-1,\infty)$. הוכיחו את תשובותכם.
פתרון: ראינו בסעיף הקודם כי 1 נקודת מקסימום גלובלי של g ולכן זה גם נקודת מקסימום של f (שהרי g זה הזזה של f בקבוע). ולכן הערך המקסימאלי הוא

$$f(1)=\frac{1}{e}$$

בנוסף, בקטע $[-1,1]$ הפונקציה f עולה ולכן הערך המינימאלי שלה בקטע $[-1,1]$ מתקבל ב -1 וערכו הוא

$$f(-1)=-e$$

בקרן $[1,\infty)$ הפונקציה f יורדת ולכן כל הערכים גדולים מהגבול

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$$

ולכן ערך המינימום של f הוא $-e$.

5. תהא f פונקציה שגזירה בכל הממשיים כך שנגזרתה רציפה בכל הממשיים. עוד נניח כי למשוואה $f'(x)=0$ קיים פתרון יחיד.

(א) הוכיחו שאם ל f יש מינימום מקומי אז הוא מינימום גלובלי.
פתרון: נניח c נקודת מינימום מקומי של f ונראה כי היא מינימום גלובלי. כיוון ש c מיני' מקומי מתקיים $f'(c)=0$ וזהו הפתרון היחיד שנתון למשוואה $f'(x)=0$. נניח בשלילה כי c אינה נקודת מינ' גלובלי אזי קיימת נקודה d כך ש $f(d)<f(c)$. כיוון ש f רציפה בקטע מ c ל d אז לפי משפט ויירשטארס היא מקבלת שמה מיני'. נקודת מינ' זו שונה מ c (שהרי הערך ב d קטן מהערך ב c) ובנקודה זו הנגזרת שווה לאפס בסתירה לכך שיש רק פתרון אחד (שראינו שהוא c) למשוואה $f'(x)=0$.

(ב) הוכיחו שאם $f(-1)=f(1)$ אזי ל fיש נקודת קיצון מקומי.
פתרון: בקטע $[-1,1]$ הפונקציה f רציפה ומקבלת אותו ערך בקצוות ולכן לפי משפט ויירשטארס יש לה שמה מינ' וגם מקס' והם נקודות קיצון מקומי.