בס"ד

פתרון בחינה אלגברה לינארית 2 113-89 תשע"א סמסטר ב'.
מרצים: פרופ' סטיב שניידר ופרופ' גרגורי סוייפר.

חלק 1:

1. הפתרון לפי הנוסחה : $[T]_B^B = [I]_B^E [T]_E^E [I]_E^B$.

2. מציאת הגרעין בעזרת פתרון מערכת משוואות : $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$ והפעלת תהליך ג"ש על התוצאה.

3. שיטת קרמר : $x_i = \dfrac{|A_i b|}{|A|}$ ולכן : $(x_1, x_2, x_3) = (55/8, -11/4, 3/8)$

4. הוקטורים הנתונים הם אורתוגונלים, ולכן הצי"ל :
יהיה $v = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \alpha_3 \vec{v_3} + \alpha_4 \vec{v_4}$: $\alpha_i = \dfrac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$. החישוב הישיר נחשב לא מושלם ולכן קיבל לכל היותר 70% מהנקודות באם לא היו טעויות חישוב.

חלק 2 :

1. המטריצה היא סימטרית ולכן לכסינה לפי משפט.
2. למטריצה 3 ע"ע שונים ולכן לכסינה.

חלק 3:

1. נראה שכל $v \in V$ הוא מהצורה $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$.
נגדיר : $v = \underbrace{\dfrac{v + \varphi(v)}{2}}_{v_1} + \underbrace{\dfrac{v - \varphi(v)}{2}}_{v_2}$. כיוון ש $\varphi^2 = 1$ נקבל ש

$\varphi(v_1) = \varphi\left(\dfrac{v + \varphi(v)}{2}\right) = \dfrac{\varphi(v) + \varphi(\varphi(v))}{2} = \dfrac{v + \varphi(v)}{2} = v_1$ ולכן מתקיים ש אכן $v_1 \in V_1$.

באותה צורה ניתן להראות ש $\varphi(v_2) = -v_2$ ולכן $v_2 \in V_2$. ולכן $V = V_1 + V_2$.

כעת נראה שהסכום הוא סכום ישר : יהי $v \in V_1 \cap V_2$. אזי $v = \varphi(v) = -v$ ולכן $v = \vec{0}$. לכן הסכום הוא סכום ישר, $V = V_1 \oplus V_2$.

יהי $\{v_1, ..., v_m\}$ בסיס ל V_1 ו $\{w_1, ..., w_s\}$ בסיס ל V_2. אזי $\varphi(v_i) = v_i$, $\varphi(w_j) = -w_j$. ואיחודם הוא בסיס של V.

2. נציג שני פתרונות:

1. נחשוב על המטריצה כמטריצה מייצגת של העתקה ונבצע החלפת בסיס:
$w_1 = e_4, w_2 = e_3, w_3 = e_2, w_4 = e_1$. לאחר החלפת הבסיס נקבל את המטריצה בצורת ז׳ורדן-

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

2. קל לוודא שהפולינום המינימלי הוא $m_A = (x-\alpha)^4$ ולכן גודל הבלוק הגדול ביותר הוא 4 ולכן צורת הז׳ורדן הינה המטריצה לעיל.

3. נחלק לשני החלקים:

א. $AA^T = 0$ כל האיברים על האלכסון של המטריצה AA^T הם מהצורה $\left(AA^T\right)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$ ולכן אם סכום של ריבועים חיוביים ממשיים הוא 0 נובע ש כל אחד מהם =0 ולכן $a_{ik} = 0$.

ב. ידוע ש $BAA^t = 0$ נכפול את שני האגפים משמאל ב B^T ונקבל $BAA^T B^T = 0$ והלוא זה בדיוק: $BA\left(BA\right)^T = 0$ ולכן לפי א נקבל הדרוש.

4.

א. על מנת להוכיח ש $V_1 \oplus V_2 = V$ יש להוכיח שהחיתוך הוא זר ושהסכום הוא כל המרחב. העובדה שהחיתוך זר נתונה, לכן יש רק להוכיח שהסכום נותן את המרחב כולו.
נסמן לצורך הפשטות $\dim V = m$. ידוע כי $V_1 \oplus V_1^{\perp} = V$ ולכן $\dim V_1 + \dim V_1^{\perp} = \dim V = m$, עוד נסמן

$$\dim V_1 = x, \dim V_1^{\perp} = m - x$$

$$\dim V_2 = y, \dim V_2^{\perp} = m - y$$

לכן,

$$\dim(V_1^{\perp} + V_2^{\perp}) = \dim V_1^{\perp} + \dim V_2^{\perp} - \dim\left(V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}\right) = m - x + m - y = 2m - x - y$$

אבל מכיוון שזה מוכל במרחב מתקיים $2m - x - y \le m$ ולכן $m \le x + y$. אבל

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim\left(V_1 \cap V_2\right) = x + y$$

ו $\dim(V_1 + V_2) \le \dim V = m$ וביחד $m \le x + y \le m$ ולכן $x + y = m$ ולכן $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V_1^{\perp} + \dim V_2^{\perp} = m$ וסה״כ יחד עם משפט המימדים מקבלים $V_1 \oplus V_2 = V_1^{\perp} \oplus V_2^{\perp} = V$.

ב. הערה: הנתון שהמימד הינו אי זוגי הוא **הכרחי**. ניתן לראות זאת על ידי הדוגמא הבאה: יהי $V = \mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. יהיו $V_1 = span\left\{(1,0)\right\}, V_2 = span\left\{(1,1)\right\}$. אזי $V_1^{\perp} = span\left\{(0,1)\right\}, V_2^{\perp} = span\left\{(1,-1)\right\}$.
כל החיתוכים הם אפס ולכן סכום מימדי החיתוכים הוא אפס וזו דוגמא נגדית. לכן כל הוכחה שלא משתמשת בנתון שהמימד הינו אי זוגי אינה תקפה.

הוכחת התרגיל: ידוע כי $V_1 \oplus V_1^{\perp} = V$ ולכן $\dim V_1 + \dim V_1^{\perp} = \dim V = 2n+1$ לכן אחד מהשניים גדול ממש מ n (כאן משתמשים בהנחה שהמרחב ממימד אי זוגי), נניח בלי הגבלת הכלליות $\dim V_1 > n$. באופן דומה, נניח בלי הגבלת הכלליות ש $\dim V_2 > n$.

כעת $2n+1=\dim V \geq \dim\left(V_1+V_2\right)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)\geq$

$\geq (n+1)+(n+1)-\dim(V_1\cap V_2)$

ולכן $\dim(V_1\cap V_2)\geq 1$ ולכן $V_1\cap V_2\neq\phi$.