1. חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

ב. $\int \frac{x^4+x+1}{(x+1)(x^2+x+1)}dx$

2. נביט בטור הפונקציות $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{nx}}{2n+1}$

א. חשבו את תחום ההתנסות של הטור

ב. חשבו את פונקציית הגבול (סכום) של הטור

זה מזכיר את הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

נתחיל מטור ידוע, וננסה לפתח עד שנגיד לטור זה

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

כאשר תחום ההתכנסות הוא $(-1,1)$

נציב x^2 זה יתכנס כאשר $-1<x^2<1$ כלומר באותו תחום

$$\frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$$

נבצע אינטגרציה, רדיוס ההתכנסות ישאר 1.

ראשית נפרק את הביטוי משמאל לשברים חלקיים

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right]$$

$$\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{1}{2}[\ln|x+1|-\ln|x-1|]_0^x=\frac{\ln|x+1|-\ln|x-1|}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

קל לוודא שתחום ההתכנסות הוא $(-1,1)$, (קל להציב את הקצוות ולראות שמתבדר)

נציב $e^{\frac{x}{2}}$ זה יתכנס אם ורק אם $-1<e^{\frac{x}{2}}<1$ כלומר $x<0$.

$$\frac{\ln\left|e^{\frac{x}{2}}+1\right|-\ln\left|e^{\frac{x}{2}}-1\right|}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{nx+\frac{x}{2}}}{2n+1}$$

נחלק את שני הצדדים ב$e^{\frac{x}{2}}$ זה לא ישנה את תחום ההתכנסות

$$\frac{\ln\left|e^{\frac{x}{2}}+1\right|-\ln\left|e^{\frac{x}{2}}-1\right|}{2e^{\frac{x}{2}}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{nx}}{2n+1}$$

סה"כ חישבנו את הסכום, ותחום ההתכנסות הוא $(-\infty,0)$

.3

א. תהי סדרת פונקציות $f_n(x)=n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)$. הוכיחו כי פונקציית הגבול $f(x)$ רציפה וגזירה בתחום $(0,\infty)$.

אמנם אפשר להראות התכנסות בנקודה והתכנסות במ"ש של סדרת הנגזרות הרציפות, אז זו דרך חתחתים, ננסה משהו אחר.

נחשב את פונקצית הגבול

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)=\infty\cdot 0=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{x^t-1}{t}=\frac{0}{0},L'Hopital=\lim_{t\to 0^+}\frac{x^t\ln(x)}{1}=\ln(x)$$

אכן פונקציה זו רציפה וגזירה בתחום.

ב. קבעו עבור אילו ערכי α האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}}$

נקודות חשודות $1,\infty$

עבור 1, נבדוק האם הפונקציה חסומה בסביבה, ננסה בעזרת חישוב גבול.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{xln^{\alpha}(x)}=\begin{cases}\infty & \alpha>0\\ 1 & \alpha=0\\ 0 & \alpha<0\end{cases}$$

הנקודה 1 בעייתית אם ורק אם $\alpha>0$

נבדוק את התכנסות האינטגרל

$$\int_{\boxed{1}}^{e}\frac{1}{xln^{\alpha}(x)}dx=\begin{Bmatrix}t=x-1\\ dt=dx\end{Bmatrix}=\int_{\boxed{0}}^{e-1}\frac{1}{(t+1)\ln^{\alpha}(1+t)}dt$$

נשווה עם $\int_0^{e-1}\frac{1}{t^{\alpha}}dt$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{t^{\alpha}}{(t+1)\ln^{\alpha}(1+t)}=\left(\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{\ln(1+t)}\right)^{\alpha}=1$$

לכן הם חברים, והאינטגרל שלנו גם מתכנס אם ורק אם $0<\alpha<1$ (שימו לב שאנחנו עובדים רק עבור ערכים חיוביים של הפרמטר).

כרגע, עבור $\alpha\geq 1$ האינטגרל בשאלה <u>כולו</u> מתבדר, כי הוא התבדר בקטע כלשהו.

כעת נעבוד עם האינטגרל

$$\int_e^{\infty}\frac{1}{xln^{\alpha}(x)}dx=\begin{Bmatrix}t=\ln(x)\\ dt=\frac{1}{x}dx\end{Bmatrix}=\int_1^{\infty}\frac{1}{t^{\alpha}}dt$$

הערה: למעשה היה ניתן לעשות הצבה זו מההתחלה, ולחסוך **המון** זמן.

בכל אופן, אינטגרל זה מתכנס אם ורק אם $\alpha>1$ ולכן סה"כ האינטגרל כולו בשאלה מתבדר תמיד.

4. חשבו את טור הפורייה של ההמשך המחזורי של הפונקציה $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ בקטע $(-\pi,\pi]$.

עבור אילו ערכי x טור הפורייה שווה לפונקציה?

5. תהי סדרת פונקציות $f_n(x)$ רציפות המתכנסת במידה שווה לפונקציית גבול מחזורית בכל $\mathbb{R}$.

כלומר קיים a כך ש לכל x מתקיים כי $f(x+a)=f(x)$

א. הוכיחו/הפריכו: קיים N כך שלכל $n>N$ הפונקציות $f_n(x)$ מחזוריות.

הפרכה:

$$f_n(x)=e^{-n(x^2+1)}$$

ברור שהסדרה מתכנסת לפונקציה המחזורית אפס.

כעת נוודא התכנסות במ"ש.

$$d_n=\sup_{\mathbb{R}} e^{-n(x^2+1)}=\sup_{\mathbb{R}}\frac{1}{e^{n(x^2+1)}}=\frac{1}{e^n}\to 0$$

לכל n הפונקציה $f_n(x)$ חח"ע בחיוביים ולכן אינה מחזורית.

ב. הוכיחו/הפריכו: קיים N כך שלכל $n>N$ הפונקציות $f_n(x)$ חסומות.

מחזורית רציפה, רציפה בקטע הסגור של המחזור שלה ושם היא חסומה לפי ויירשטראס ולכן חסומה בכל הממשיים.

כיוון שסדרת הפונקציות הרציפות מתכנסת במ"ש גם פונקצית הגבול רציפה, סה"כ פונקצית הגבול רציפה ומחזורית בכל הממשיים ולכן חסומה.

בעקבות ההתכנסות במ"ש

$$d_n\to 0$$

לכן החל משלב מסויים $d_n<1$

ולכן החל משלב זה לכל $x\in\mathbb{R}$

$$|f_n(x)-f(x)|\le d_n<1$$

$$f(x)-1<f_n(x)<f(x)+1$$

ולכן גם הן חסומות!

6. תהי פונקציה f ותהי חלוקה P של הקטע $[a,b]$ כך ש $\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)=0$

א. הוכיחו/הפריכו: f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$

למרות שניתן להוכיח באמצעות סעיף ב', נוכיח באופן בלתי תלוי

$$0 \le \overline{\int} f - \underline{\int} f < \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = 0$$

לכן ההפרש בין האינטגרל העליון לאינטגרל התחתון הוא אפס, כלומר הם שווים, כלומר הפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה.

ב. הוכיחו/הפריכו: f קבועה בקטע $[a,b]$

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k = 0$$

כיוון שמדובר בסכום של אי שליליים שמתאפס, כל אחד מהם חייב להיות שווה אפס.

ולכן לכל k מתקיים כי $M_k = m_k$

לכן הפונקציה קבועה בכל תת קטע.

$$f(x_0) = f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_n)$$

לכן הערכים בתתי הקטעים השונים גם שווים, ולכן סה"כ הפונקציה קבועה בכל הקטע.