פתרון בוחן חדו"א 2 לאודיסאה 86-148 – 2.5.24

משך המבחן: שעה וחצי

חומר עזר: מחשבון בלבד

הוראות: יש לענות על כל השאלות, כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

1. (36 נק') נביט בטור

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

א. חשבו את תחום ההתכנסות של הטור.

נחשב את רדיוס ההתכנסות

$$R=\lim\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=\lim\frac{n+1}{n}=1$$

כעת נבדוק מה קורה בקצוות.

עבור $x=0+1$ נקבל את הטור ההרמוני $\sum\frac{1}{n}$ שהוא כמובן מתבדר.

עבור $x=0-1$ נקבל את הטור $\sum(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$ שהוא מתכנס לפי מבחן לייבניץ שהרי $\frac{1}{n}$ יורדת מונוטונית לאפס.

סה"כ תחום ההתכנסות הוא

$$[-1,1)$$

ב. חשבו את $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

נתחיל מהטור ההנדסי המוכר והטוב אשר מתכנס בתחום $\frac{1}{2}\in(-1,1)$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

נחשב אינטגרל $\int_0^{\frac{1}{2}}$ לשני הצדדים

$$[-\ln|1-x|]_0^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{n}=f\left(\frac{1}{2}\right)$$

ולכן סה"כ $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln(2)$

2. (36 נק') נביט בסדרת הפונקציות $f_n(x) = \sqrt[n]{e^x}$

ראשית נחשב את פונקצית הגבול

$$f_n(x) = (e^x)^{\frac{1}{n}} \to \{(e^x)^0\} \to 1$$

א. קבעו והוכיחו אם הסדרה מתכנסת במ"ש בתחום $[0,1]$.

נחשב את סדרת החסמים

$$d_n = \sup_{x\in[0,1]} \left|\left(\sqrt[n]{e}\right)^x - 1\right|$$

כיוון ש $\sqrt[n]{e} > 1$ הפונקציה $\left(\sqrt[n]{e}\right)^x$ מונוטונית עולה ולכן גם $\left(\sqrt[n]{e}\right)^x - 1$.

עבור $x = 0$ נקבל שההפרש הוא אפס, ומכאן הפונקציה עולה ולכן חיובית.

המקסימום מתקבל בקצה הימני

$$d_n = \sqrt[n]{e} - 1$$

ואכן $d_n \to 0$ כיוון ש $\sqrt[n]{e} = e^{\frac{1}{n}} \to e^0 = 1$ ולכן הסדרה מתכנסת במ"ש בתחום זה.

ב. קבעו והוכיחו אם הסדרה מתכנסת במ"ש בתחום $\mathbb{R}$, כלומר $(-\infty,\infty)$.

שוב נחשב את סדרת החסמים

$$d_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\left(\sqrt[n]{e}\right)^x - 1\right|$$

כאמור $\sqrt[n]{e} > 1$ ולכן $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[n]{e}\right)^x - 1 = \infty$

ולכן $d_n = \infty$ וכמובן $d_n \nrightarrow 0$ והסדרה אינה מתכנסת במ"ש בתחום זה.

(למעשה היא לא מתכנסת במ"ש בכל קטע מהצורה (M,∞) לפי החישובים שלנו.)

3. (36 נק') נטע הנמלה מטיילת על חוף הים, שהטמפרטורה בכל נקודה בו נמדדת ע"י הפונקציה הדיפרנציאבילית $f(x,y)$.

עוד נתון כי $f_x(0,0) = 1$ וכן $f_y(0,0) = 2$.

(אין קשר בין הסעיפים):

א. נתון כי נטע הנמלה נמצאת בנקודה $(0,0)$. באיזו כיוון נטע צריכה ללכת על מנת להתחמם?

כיוון העלייה התלולה ביותר הוא כיוון הגרדיאנט, ובמקרה זה מדובר ב

$$\nabla f(0,0) = \left(f_x(0,0), f_y(0,0)\right) = (1,2)$$

ב. בסעיף זה נתון כי נטע מטיילת במסלול $\left(t-1, y(t)\right)$ כאשר $y(t)$ פונקציה גזירה.

חשבו את $y(1), y'(1)$ אם נתון כי הנקודה $(0,0)$ הייתה הנקודה הכי חמה במסלול שנטע עברה.

ראשית, כיוון שנטע עוברת בנקודה $(0,0)$ במסלולה, וכיוון ש $t-1=0$ כאשר $t=1$ בלבד, נובע כי

$$\left(1-1, y(1)\right)=(0,0)$$

ולכן $y(1)=0$

שנית, נחשב את פונקצית הטמפרטורה במסלול של נטע

$$h(t)=f\left(t-1, y(t)\right)$$

כאשר $t=1$ נטע הגיע לקיצון מוחלט ולכן מקומי, ולכן $h'(1)=0$

נגזור לפי כלל השרשרת

$$h'(t)=f_x\left(t-1, y(1)\right)\cdot 1+f_y\left(t-1, y(t)\right)\cdot y'(t)$$

$$0=h'(1)=f_x(0,0)\cdot 1+f_y(0,0)\cdot y'(1)$$

$$0=1+2y'(1)$$

ולכן סה"כ

$$y'(1)=-\frac{1}{2}$$