<u>תרגיל כיתה 6 - אנליזה מודרנית</u>

התכנסות נשלטת

תזכורת: יהיו $f_n : X \to \mathbb{R}^*$ פונקציות מדידות כך ש $f_n \to f$, ונניח וקיימת פונקציה איטגרבילית g $|f_n| \leq g$ לכל n . אזי f_n ו f אינטגרביליות ומתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

1. תהי $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית ותהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ חסומה, מדידה (לבג) ורציפה בנקודה $x_0 = 1$ הוכיחו שהגבול $I = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f\left(1+\frac{x}{n^2}\right) g(x)\,dx$ קיים, וחשבו אותו.

פתרון: נוכל לרשום את האינטגרל בצורה הבאה: $\int_{\mathbb{R}} f\left(1+\frac{x}{n^2}\right) g(x) I_{(-n,n)}(x)\,dx$.

נגדיר את סדרת הפונקציות המדידות $h_n(x) = f\left(1+\frac{x}{n^2}\right) g(x) I_{(-n,n)}(x)$.

f רציפה בנקודה 1 ולכן $\lim_{n\to\infty} f\left(1+\frac{x}{n^2}\right) = f(1)$ וקיימת פונקציית הגבול $h = f(1) g(x) I_{(-\infty,\infty)}(x) = f(1) g(x)$. יהי M חסם של f . לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $|h_n(x)| \leq M|g(x)|$ והפונקציה באגף ימין אינטגרבילית. ע"פ משפט ההתכנסות הנשלטת הגבול הוא $f(1) \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$.

2. תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית, $a \in \mathbb{R}$ ונגדיר עבור $x > a$

$$F(x) = \int_{[a,x]} fdm$$

הראו כי F רציפה.

פתרון: ניקח סדרה $a < x_n$ כך ש $x_n \to x$. נגדיר $h_n = f1_{[a,x_n]}$ וברור כי $h_n \to f1_{[a,x]}$ או $h_n \to f1_{[a,x)}$ אשר שוות כב"מ ולכן האינטגרל שלהן זהה. כעת, מכיוון שהסדרה x_n מתכנסת נובע כי מ

n מסויים $x_n < M$, כאשר $x < M \in \mathbb{R}$. נשים לב כי $|h_n| \le |f| 1_{[a,M]}$ וכן $|f| 1_{[a,M]}$ אינטגרבילית.
מכאן שכל התנאים להתכנסות הנשלטת מתקיימים ולכן
$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,x_n]} f\,dm = \lim_{n\to\infty} \int h_n\,dm = \int_{[a,x]} f\,dm = F(x).$$

3. (generalized DCT) נניח כי f_n, g_n, f ו g הינן איטגרביליות, $f_n \to f$ כב"מ, $g_n \to g$ כב"מ, $|f_n| \le g_n$ לכל n וגם $\int g_n \to \int g$. הוכיחו כי $\int f_n \to \int f$.

פתרון: נגדיר סדרה חדשה של פונקציות חיוביות - $h_n = g_n - f_n$. עפ"י למת פאטו נקבל
$$\begin{aligned}
&\underline{\lim}\int h_n = \underline{\lim}\int g_n - f_n = \underline{\lim}\int g_n + \underline{\lim}\int - f_n \\
&= \lim\int g_n + \underline{\lim}\int - f_n \ge \int \underline{\lim} h_n = \int \underline{\lim}(g_n - f_n) = \int g - f \\
&\Leftrightarrow \overline{\lim}\int f_n \le \int f
\end{aligned}$$
מצד שני , נגדיר $h_n = g_n + f_n$ עפי למת פאטו נובע כי
$$\begin{aligned}
&\underline{\lim}\int h_n = \underline{\lim}\int f_n + g_n = \underline{\lim}\int f_n + \int g \\
&\ge \int \underline{\lim} h_n = \int \underline{\lim}(f_n + g_n) = \int f + \int g. \\
&\Leftrightarrow \underline{\lim}\int f_n \ge \int f
\end{aligned}$$
מכאן שבסך הכל $\overline{\lim}\int f_n \ge \int f \ge \underline{\lim}\int f_n$ ולכן $\int f_n \to \int f$.

התכנסות חסומה

תזכורת : יהיו $f_n : X \to \mathbb{R}$ פונקציות מדידות כך ש $f_n \to f$, $\mu(X) < \infty$ וגם $|f_n| < M$. אזי f_n, f אינטגרביליות וגם מתקיים $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$.

4. יהי (X,S,μ) ממ"ח סיגמא סופי. נניח ו f הינה אינטגרבילית ואי שלילית. הוכיחו כי אם $\varepsilon > 0$ אזי קיימת $A \in S$ כך ש $\mu(A) < \infty$ ומתקיים
$$\varepsilon + \int_A f > \int f.$$

פתרון: מכיוון ש (X,S,μ) הינו ממ"ח סיגמא סופי, נובע כי קיימת סדרה של קבוצות $A_n \in S$ כך ש $\mu(A_n) < \infty$ וגם $X = \bigcup_n A_n$. ללא הגבלת הכלליות נניח כי A_n זרות. נסמן $E_k = \bigcup_{n=1}^{k} A_n$ איחוד סופי של קבוצות ונסמן $f_n = f 1_{E_n}$, הצימצום של f על E_n . מכיוון ש $X = \bigcup_k E_k$ נובע כי $f_n \to f$, מכיוון ש f אי שלילית נובע כי $f_n \uparrow f$. נשתמש במשפט ההתכנסות המונוטונית של לבג להסיק ש $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \lim_{n\to\infty} \int f 1_{E_n} = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f = \int f$. מכיוון ש $f \ge f_n$ נובע כי $\int_{E_n} f \le \int f$ ומכאן ש $\int_{E_n} f \uparrow \int f$. קל לראות כי $\mu(E_k) < \infty$ לכל k וכי מהגדרת הגבול נובע כי $\int f > \int_{E_k} f + \varepsilon$ עבור k מספיק גדול.

5. יהיו $f, f_n : X \to [0,\infty]$ פונקציות מדידות כך ש $f_n \to f$ כב"מ ו $f \ge f_n$ לכל n . הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$.

פתרון:

נחלק לשני מקרים:

(1) $\int f = \infty$: עפ"י למת פאטו נובע כי $\int \underline{\lim} f_n = \int f \le \underline{\lim} \int f_n \Rightarrow \lim \int f = \infty$

(2) $\int f < \infty$: אזי הסדרה f_n נשלטת ע"י פונקציה אינטגרבילית f ולכן ממשפט ההתכנסות הנשלטת נובע כי $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$.

6. יהיו $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות כך ש $f_n \to f$ כב"מ. הוכיחו כי $\int |f_n| \to \int |f| \Leftrightarrow \int |f - f_n| \to 0$.

פתרון:

$\Leftarrow$: נניח כי $\lim \int |f - f_n| = 0$.

אזי

$$\int_X |f_n - f| du \ge \int_X \big||f_n| - |f|\big| du \ge \left| \int_X |f_n| - |f| du \right| = \left| \int_X |f_n| du - \int_X |f| du \right|$$

ומכאן ש

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| du \ge \lim_{n\to\infty} \left| \int_X |f_n| du - \int_X |f| du \right| = 0$$

$\Rightarrow$: נניח כי $\int\limits_X |f|du = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X |f_n|du$.

נשים לב כי $|f - f_n| \geq |f| + |f_n| = g_n$. ברור כי g_n אינטגרבילית וכי $g = 2f \leftarrow g_n$ כב"מ וכי $\int g \leftarrow \int g_n$ מכך ש $\int |f| \leftarrow \int |f_n|$. כעת ברור כי מתקיימים כל התנאים למשפט הכללי של ההתכנסות הנשלטת ולכן נובע כי

$0 = |f - f_n|\lim\int = |f - f_n|\int\lim$. מש"ל.